

TRATTATO

DI

ARITMETICA

ELEMENTARE

DI

GIUSEPPE FRANÇOIS



FIRENZE
PER V. BATELLI E COMPAGNI
1845.

PREFAZIONE

L'aritmetica, necessaria a tutto il genere umano, deve considerarsi come uno dei primi anelli della pubblica istruzione, essa dirige le più belle speculazioni commerciali, è utile a tutte le professioni, e l'uomo più istruito, ignaro affatto di essa, difficilmente potrebbe farsi onore nel disimpegno delle sue occupazioni, motivi fortissimi per impegnare tutte le classi della civile società a studiarla, cominciando dai giovani della più tenera età.

Penetrato dalle verità di sopra enunciate, e col vivo desiderio di facilitare tale studio tanto vantaggioso, mi sono prefisso di fare questo trattato per i fanciulli, con l'animo rivolto a portare i medesimi dalle più piccole nozioni sopra i numeri, fino alla conoscenza completa delle regole superiori dell'aritmetica. Fermo in questo modo di vedere, cercherò renderne conto con brevi parole.

Ho diviso il detto Trattato in tre parti.

Nella prima parte ho parlato di tutto ciò che ha relazione ai numeri astratti; cioè: sistema

di numerazione dei numeri interi; quindi operazioni che si possono fare sopra i medesimi, come addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione, avendo esteso queste medesime regole anche ai rotti tanto ordinari che decimali.

Nella seconda parte ho fatto conoscere le monete, pesi e misure in uso in Toscana, non meno che alcune di quelle delle principali città di Europa, le quali sono di un uso frequente nel commercio; quindi ho applicato le regole stabilite nella prima parte ai numeri complessi.

Finalmente ho riserbato alla terza parte il paragone delle quantità, da cui deduco la regola del tre, applicando questa alle questioni di società e d' interesse; ed ho cercato d' introdurre in quest'ultima parte tutto ciò che può desiderarsi perchè il presente trattato di Aritmetica elementare riesca completo.

In tutte tre le parti, e alla fine di ciascun capitolo ho stimato opportuno annettere alcune utili applicazioni, per esercizio degli studiosi.

La mia volontà certamente è stata rivolta a procurare alla gioventù la cognizione di una scienza dalla quale tanta utilità ne trae tutta la società; e mi troverò ben contento se il pubblico in generale, stimerà che ne abbia raggiunto lo scopo anche in parte.

Giuseppe François

TRATTATO

DI ARITMETICA

PARTE PRIMA

CAPITOLO PRIMO

NOZIONI PRELIMINARI

1. L' Aritmetica è la scienza che spiega le proprietà e gli usi dei numeri, e fa conoscere il vero modo di calcolare con facilità e speditezza.

Per *numero* s' intende una collezione o riunione di unità.

L' *unità* è una delle cose che si contano.

Esempii: Quando si contano delle pere, la *pera* è l' unità. Se si hanno *sette* pere, sette che esprime quante pere si sono contate è ciò che si chiama numero.

Quando si contano delle pecore, la *pecora* è l' unità, e se vi sono cento quaranta pecore, *cento quaranta* è il numero.

Le unità sono di tante specie, quante sono le cose che ammettono di essere contate, misurate ec.; poichè l' unità cangia, tutte le volte che cangiano le cose alle quali si applica il calcolo.

2. I numeri si dividono in *astratti* e *concreti*. Numeri astratti sono quelli che non determinano alcuna specie di unità, come quattro, sette, trenta, ec. I numeri concreti al contrario indicano la specie dell' unità; così, venti donne, due cavalli, cento pere, ec. sono numeri concreti.

I numeri si dividono anche in *interi* o *rotti*. I primi contengono l' unità più volte esattamente; come, nove uomini, ventidue alberi, trentacinque cani, ec. I secondi che si chiamano anche *frazioni*, contengono una o più parti dell' unità solamente, come, una mezza pera, due terzi di un cappone, ec.

CAPITOLO SECONDO

Della Numerazione

3. La numerazione consiste nell' arte di rappresentare e di enunciare i numeri; per rappresentare i numeri si adoprano dieci caratteri, chiamati cifre, che vengono dagli Arabi, queste sono

1, 2, 3, 4, 5,
uno, due, tre, quattro, cinque,
6, 7, 8, 9, 0,
sei, sette, otto, nove, zero.

Le prime nove si sono chiamate cifre significative, unità semplici, o del prim' ordine, l' ultima non ha per se stessa verun valore, ma come vedremo in seguito è adattatissima a tenere il posto delle diverse collezioni di unità che posson mancare.

Per esprimere tutti gli altri numeri, si è convenuto che dieci unità semplici saranno bastanti a formare una sola unità del second' ordine, che prenderebbe il nome di *diecina*, che dieci diecine formerebbero il numero chiamato *centinaio* o unità del terz' ordine, che dieci centinaia prenderebbero il nome di *mille* o unità del quart' ordine; e così di seguito. Queste diverse collezioni di unità si sono espresse come segue.

. . . . 1 diecina . . . . dieci
. . . . 2 diecine . . . . venti
. . . . 3 diecine . . . . trenta

. . . .	4 diecine	quaranta
. . . .	5 diecine	cinquanta
. . . .	6 diecine	sessanta
. . . .	7 diecine	settanta
. . . .	8 diecine	ottanta
. . . .	9 diecine	novanta
10 diecine. . . . o . . .	1 centinaio . . .	cento
20 diecine	2 centinaia . . .	duecento
30 diecine	3 centinaia . . .	trecento
:	:	:
70 diecine	7 centinaia . . .	settecento
:	:	:
90 diecine. . . . . o . .	9 centinaia . . .	novecento
10 centinaia	1 migliaio. . . .	mille
20 centinaia	2 migliaia. . . .	duemila
:	:	:
90 centinaia. . . o . . .	9 migliaia. . . .	novemila
10 migliaia.	1 diec. di migl.	diecimila
20 migliaia	2 diec. di migl.	ventimila
:	:	:
90 migliaia . . . o . . .	9 diec. di migl.	novantamila
10 diec. di migl.. . . .	1 cent. di migl.	centomila
20 diecine. di migl . . .	2 cent. di migl.	duecentomila
:	:	:
90 diecine di migl. o .	9 cent. di migl.	novecentomila
10 cent. di migliaia. . .	1 milione. . . .	milione
20 cent. di migl.	2 milioni	due milioni
:	:	:
90 cent. di migl.	9 milioni	nove milioni
ec.	ec.	ec.

E quindi ponendo fra una diecina e un' altra i nove primi numeri semplici si sono formati i numeri

dieci-uno, dieci-due . . . . dieci-nove
vent' uno, ventidue . . . . ventinove
: :
novantuno, novantadue. . . . . novantanove

N. B. Conviene osservare che l' uso ha stabilito che i numeri, dieci-uno, dieci-due . . . dieci-sei, si chiamino *undici*, *dodici*, *tredici*, *quattordici*, *quindici* e *sedici*.

Stabiliti così i novantanove primi numeri, si metteranno fra due consecutive centinaia questi novantanove numeri già convenuti; e si dirà

centuno, centodue . . . . centonovantanove
duecento, duecentuno . . . . duecentonovantanove
: :
novecento, novecentuno . . . . . . novecentonovantanove

e lo stesso metodo si terrà tra due migliaia consecutive, tra due diecine di migliaia consecutive, ec. ec.

Per poter quindi con le sole cifre di sopra stabilite, rappresentare tutti i numeri si convenne, che le stesse scritte nel primo posto a destra rappresentassero unità semplici, nel secondo diecine, nel terzo centinaia, nel quarto migliaia, ec. ec.

Da ciò ne segue che le nostre cifre hanno due valori, cioè uno *assoluto* e l' altro *relativo*.

Il valore assoluto è quello che esse hanno quando si considerano sole 1, 3, 4, 7, ec. Il valore relativo dipende dal posto che la cifra occupa; così nel numero 83, il valore assoluto della prima cifra a sinistra è *otto*, il suo valore relativo è *otto diecine*, ovvero ottanta, perchè essa è al secondo posto, e il valore dell' altra cifra è tre.

Da ciò evidentemente si comprende che il principio fondamentale del nostro sistema di numerazione è: che una cifra situata alla sinistra di un'altra, ovvero seguita da uno zero, vale dieci volte più che se essa fosse sola, e che a misura che una cifra si avanza di un posto verso

la sinistra ciascunà delle sue unità ne vale dieci della cifra che è immediatamente alla sua destra; il che meglio si comprenderà col seguente esempio, cioè:

3	sono	tre unità
30	sono	tre diecine, o trenta
300	sono	tre centinaia
3000	sono	tre migliaia
3000000	sono	tre milioni
30000000	sono	trenta milioni.

Al contrario, a misura che una cifra è avanzata di un posto verso la destra, le unità di questa cifra valgono dieci volte meno di ciascuna unità della cifra che precede verso la destra.

4. Donde segue che per rendere un numero dieci, cento, mille, ec. volte più grande basta aggiungere alla sua destra uno, due o tre zeri, ec.; e che per rendere un numero dieci, cento, mille, ec. volte più piccolo basta togliere alla sua destra uno, due o tre zeri ec.

Per enunciare facilmente un numero scritto in cifre, si divide in gruppi di tre cifre ciascuno, cominciando dalla destra, e si dà al primo gruppo il nome di unità, al secondo di migliaia, al terzo di milioni, al quarto di bilioni, al quinto di trilioni, ec. Così il num° 3,225,780,812 si enuncia dicendo: tre bilioni, duecentoventicinque milioni, settecentottantamila, ottocentododici unità; e il numero 68,570,000,806,248 si leggerà sessantotto trilioni, cinquecentosettanta bilioni, ottocentosei mila, duecentoquarantotto unità.

5. Al contrario, per scrivere in cifre un numero enunciato, si scriveranno le une in seguito delle altre, andando da sinistra a destra, le cifre che debbono rappresentare le centinaia, diecine e unità di ciascun gruppo di tre cifre, avendo cura di mettere degli zeri invece di quelle collezioni di unità che potessero mancare. Quando saremo giunti alle unità semplici, il numero enunciato sarà scritto.

Esempio. L' espressione in cifre del numero quarantadue bilioni, ventimila diciassette unità è

42,000,020,017.

6. L'alunno potrà esercitarsi sopra i seguenti esempii relativi a leggere i numeri scritti in cifre, e a scrivere in cifre i numeri scritti in linguaggio ordinario.

23—41—55—68—76—82—94—126—253—333—415—525—637—741—837—993—1148—1255—1387—1496—1529—41356—67815—237426—455376—67215354—33000—603781—53076000000—987560735780.

Scrivere in cifre i seguenti numeri

Dodici—quindici—diciannove—ventitre—trentasei—quaranta — sessantacinque — centosei — duecentonove—quattrocentottantotto — quattrocentonove — seicentodue—mille trecentoquarantasette—undici mila—cinquanta mila otto — quattrocento cinquantasei mila ottocentoquindici.

Tre milioni cinquecentodiciassette mila ottocentosessantaquattro—cinquantasei milioni settecentoventiquattro mila centododici—tre bilioni cinquantaquattro mila dueventisei trilioni centoquattro bilioni sessantadue milioni seicento sei mila ventidue.

Faremo finalmente conoscere che sette lettere rappresentano i numeri romani; cioè

I,	V,	X,	L,	C,	D,	M, ovvero CIↃ.
1,	5,	10,	50,	100,	500,	1000.

Il sistema di numerazione poi stabilito con queste lettere consiste, che se avanti ad una lettera di maggior valore trovasene una di minor valore, questa si defalca da quella; se al contrario dopo una lettera di maggior valore ne segue una di minor valore, questa si aggiunge: così IV si conterà per 4, IX si dirà 9 e LX si dirà 60.

Farò anche osservare che in questo sistema si cangiano

le unità in migliaia ponendo una linea sopra le cifre ; così 10000 si scriverà $\overline{\text{X}}$, o CCIƆƆ; 100000 ; $\overline{\text{C}}$, o CCCIƆƆƆ ; 2000000 , $\overline{\text{MM}}$.

7. L' operazioni fondamentali che si possono fare sopra i numeri sono quattro, cioè addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione.

CAPITOLO TERZO

Dell' Addizione

8. L' addizione è un' operazione mediante la quale si riuniscono più numeri in uno solo, che si chiama *somma* o *totale*.

Esempio. Ottavio aveva un dato numero di arance, ne ha mangiate nove e gliene rimagono ancora otto. Quante ne aveva?

Evidentemente in questa questione si cerca di trovare un numero che sia la somma dei due numeri 9 e 8.

Quest' operazione s' indica così $9+8=17$ (il segno $+$ indica somma: e il segno $=$ indica uguaglianza). E si legge 9 *più* 8 *uguale* 17.

9. Per essere in grado di fare un addizione, bisogna sapere a memoria le somme che danno le nove cifre semplici aggiunte due a due. S' impara ciò dalla sguente

Tavola di Addizione

1	*e*	1	*fa*	2	1	*e*	4	*fa*	5	1	*e*	7	*fa*	8
2		1		3	2		4		6	2		7		9
3		1		4	3		4		7	3		7		10
4		1		5	4		4		8	4		7		11
5		1		6	5		4		9	5		7		12
6		1		7	6		4		10	6		7		13
7		1		8	7		4		11	7		7		14
8		1		9	8		4		12	8		7		15
9		1		10	9		4		13	9		7		16
1	*e*	2	*fa*	3	1	*e*	5	*fa*	6	1	*e*	8	*fa*	9
2		2		4	2		5		7	2		8		10
3		2		5	3		5		8	3		8		11
4		2		6	4		5		9	4		8		12
5		2		7	5		5		10	5		8		13
6		2		8	6		5		11	6		8		14
7		2		9	7		5		12	7		8		15
8		2		10	8		5		13	8		8		16
9		2		11	9		5		14	9		8		17
1	*e*	3	*fa*	4	1	*e*	6	*fa*	7	1	*e*	9	*fa*	10
2		3		5	2		6		8	2		9		11
3		3		6	3		6		9	3		9		12
4		3		7	4		6		10	4		9		13
5		3		8	5		6		11	5		9		14
6		3		9	6		6		12	6		9		15
7		3		10	7		6		13	7		9		16
8		3		11	8		6		14	8		9		17
9		3		12	9		6		15	9		9		18

10. Cominceremo dall' osservare che non potremo riunire più numeri in un totale, se essi non esprimono cose della medesima specie. Infatti non si potrebbe addizionare 9 uomini e 5 cavalli, poichè la somma 14 dei numeri 9 e 5 non esprimerebbe nè 14 uomini nè 14 cavalli.

Premesso ciò, e avendo imparato mediante la precedente tavola a sommare i numeri semplici, passiamo ora alla somma dei numeri composti.

Si abbiano da sommare i seguenti numeri:

2034, 6477, 962, 5690, 721.

Per eseguire con maggior facilità la somma di questi numeri, si comincia da scriverli gli uni sotto gli altri, in modo che le unità del medesimo ordine sieno in una stessa colonna verticale, come si vede qui sotto; cioè le unità sotto le unità, le diecine sotto le diecine e così di seguito. Ciò fatto si fa la somma delle cifre della prima colonna a destra, e si scrive al di sotto se essa non supera 9, nel caso contrario, si scrivono le unità semplici e si ritengono le diecine per unirle alla somma della colonna delle diecine, sopra della quale si opera come sulla colonna dell' unità e così di seguito. Quando siamo giunti all' ultima colonna, il riporto se ve ne è alcuno, siccome non può essere aggiunto a niente, così esso si scrive alla sinistra del numero

```
 2034
 6477
  962
 5690
  721
-----
15884
```

Per addizionare l' esempio proposto si dirà 1 e 0 fa 1, e 2 fa 3, e 7 fa 10, e 4 fa 14, quattordici unità formano una diecina e 4 unità, si scrive solamente sotto la colonna dell' unità 4, e si ritiene la diecina per unirla alla somma delle diecine. Passati alla colonna delle diecine si

dice 1 che porto dalla colonna dell' unità e 2 fa 3, e 9 fa 12, e 6 fa 18, e 7 fa 25, e 3 fa 28; e siccome 28 diecine sono uguali a 8 diecine e 2 centinaia, scrivo le 8 diecine sotto la colonna delle diecine, e ritengo le due centinaia per unirle alla somma della colonna delle centinaia. Operando ugualmente sopra le centinaia si trova 28 centinaia, si segna al solito le 8 centinaia e si ritiene le due migliaia per unirle alla somma della colonna delle migliaia; questa con le 2 migliaia riportate dà 15, numero che si scrive tutto intero, perchè non vi sono altri numeri da sommare, così la somma totale è 15884.

11. Per esercizio si potranno eseguire le seguenti somme e problemi

4637	7864	47854
238	3729	3799
79	864	63212
2054	1798	78

Problema 1.° Una persona è nata nel 1823; a qual' epoca avrà 27 anni? Ris. nell' anno 1850.

Problema 2.° Un uomo si è maritato nell' età di 27 anni. Esso ha perduto la sua moglie 12 anni dopo. Rimasto vedovo per 5 anni, ha preso una seconda moglie, con la quale ha vissuto 7 anni, ed esso stesso è morto 11 anni dopo, si domanda l' età alla quale è giunto. Ris. anni 62.

Problema 3.° Qual è la popolazione di tutta la terra, sapendo che l' Europa ha 168000000 di abitanti, l' Asia 580000000, l' Affrica 92000000, l' America 150000000, e l' Oceanica 10000000? Ris. 1000000000 di abitanti.

Problema 4.° Gli alunni di uno stabilimento son divisi in cinque classi: nella prima, vi sono 40 alunni; nella seconda e nella quinta ve ne sono 17; nella terza ve ne sono 25, e nella quarta ve ne sono 27.

Quante arance bisognerà comprare perchè dandone una a ciascuno alunno, ne rimangano 24 per i maestri? Ris. 150 arance.

CAPITOLO QUARTO

Della Sottrazione

12. Uno doveva 8 monete ad un suo creditore gliene ha date 5; quanto resta a dargli?

È evidente che non si dovrà cercare che la differenza che passa fra i numeri 8 e 5; cioè levare dal numero maggiore, che segna il debito, il numero minore che indica il pagamento già fatto.

Da ciò vediamo che la sottrazione si può definire: *Un' operazione mediante la quale si toglie un numero da un altro per conoscerne la differenza.*

Quest' operazione si scrive 8—5=3 (il segno — indica la sottrazione). E si legge 8 *meno* 5 *uguale a* 3.

13. Il numero maggiore, da cui si deve sottrarre il minore, si chiama *diminuendo.*

Il numero minore, che si deve sottrarre dal maggiore, si chiama *diminutore.*

Il numero che indica di quanto il maggiore supera il minore, si chiama *resto*, *eccesso* o *differenza.*

14. Per ben eseguire la sottrazione sarà utile imparare a memoria la seguente:

Tavola di Sottrazione

da	1	*l.* 1	*r.* 0	*da*	4	*l.* 4	*r.* 0	*da*	7	*l.* 7	*r.* 0
	2	1	1		5	4	1		8	7	1
	3	1	2		6	4	2		9	7	2
	4	1	3		7	4	3		10	7	3
	5	1	4		8	4	4		11	7	4
	6	1	5		9	4	5		12	7	5
	7	1	6		10	4	6		13	7	6
	8	1	7		11	4	7		14	7	7
	9	1	8		12	4	8		15	7	8
	10	1	9		13	4	9		16	7	9

da 2	*l.* 2	*r.* 0	*da* 5	*l.* 5	*r.* 0	*da* 8	*l.* 8	*r.* 0
3	2	1	6	5	1	9	8	1
4	2	2	7	5	2	10	8	2
5	2	3	8	5	3	11	8	3
6	2	4	9	5	4	12	8	4
7	2	5	10	5	5	13	8	5
8	2	6	11	5	6	14	8	6
9	2	7	12	5	7	15	8	7
10	2	8	13	5	8	16	8	8
11	2	9	14	5	9	17	8	9
da 3	*l.* 3	*r.* 0	*da* 6	*l.* 6	*r.* 0	*da* 9	*l.* 9	*r.* 0
4	3	1	7	6	1	10	9	1
5	3	2	8	6	2	11	9	2
6	3	3	9	6	3	12	9	3
7	3	4	10	6	4	13	9	4
8	3	5	11	6	5	14	9	5
9	3	6	12	6	6	15	9	6
10	3	7	13	6	7	16	9	7
11	3	8	14	6	8	17	9	8
12	3	9	15	6	9	18	9	9

15. Premesso ciò passiamo a stabilire le regole necessarie alla sottrazione sopra alcuni esempii.

1.° Si abbia da sottrarre 362 da 475. Comincio da scrivere il diminuendo 475 al di sopra del diminutore 362, in modo che le unità di un medesimo ordine si corrispondano, cioè pongo le unità sotto le unità, le diecine sotto le diecine, ec. Ora siccome è impossibile dire tutto ad un tratto la differenza che passa fra i nu-

meri 475 e 362, decompongo la sottrazione proposta in tante piccole sottrazioni quante cifre sono nel diminuendo. Comincio quindi da levare le 2 unità del diminutore dalle 5 unità del diminuendo, ed ottengo 3 unità per resto. Inseguito tolgo le 6 diecine del diminutore dalle 7 diecine del diminuendo ed ho per resto 1 diecina. Finalmente le 3 centinaia del diminutore levate dalle 4 centinaia del diminuendo danno 1 centinaio di resto. Per conseguenza, la differenza che passa fra i numeri 475 e 362 è di 113. In tutti i casi simili ci conformeremo al modello qui sotto notato

475
362
———
113

È evidente inoltre che togliendo le unità dalle unità, le diecine dalle diecine, le centinaia dalle centinaia, ec. levo tutte le parti del diminutore dalle parti corrispondenti del diminuendo; e siccome togliendo tutte le parti di una cosa si toglie necessariamente questa cosa tutta intera, così operando in questo modo si deve arrivare necessariamente ad ottenere la vera differenza fra i due numeri dati.

2.° Si abbia da sottrarre 7329 da 9262. Scrivo i numeri come nell' esempio precedente: cioè

9262
7329
————
1933

Non potendosi sottrarre le 9 unità del diminutore dalle 2 del diminuendo; siccome si sa (n.° 3) che le unità di ciascuna cifra situata alla sinistra di un' altra hanno un valore 10 volte più grande delle unità della cifra situata alla destra; così prendendo dalle 6 diecine una diecina, prenderò dieci unità di prim'ordine, le quali congiunte alle

2 unità esistenti nella prima colonna a destra danno 12 unità, dalle quali tolte le 9 unità del diminutore avrò per resto 3. In seguito passando alle diecine diremo (rammentandoci che una diecina si è adoperata onde rendere possibile la sottrazione dell' unità del prim' ordine) da 5 diecine togliendone 2 avremo per resto tre diecine. Passando in seguito alle centinaia, si dirà da 2 centinaia non si può levarne 3, ma prendendo dalle 9 migliaia alla sinistra un migliaio questo è eguale a 10 centinaia, che unite alle 2 fanno 12 centinaia, dalle quali tolte le 3 centinaia del diminutore, si ottiene per resto 9, che si scrive sotto le centinaia. Infine dalle 8 residue migliaia levandone 7 si ottiene un migliaio. Talchè la differenza fra i due numeri 9262 e 7329 è 1933.

3.° Si abbia da sottrarre 7397 da 9002: scritti questi numeri come sopra

$$\begin{array}{r} 9002 \\ 7397 \\ \hline 1605 \end{array}$$

non potendo sottrarre 7 unità da 2 unità, è necessario prendere ad imprestito una diecina dalla cifra a sinistra del diminuendo, questa essendo zero ciò non è possibile, ed è necessario perciò di modificare in qualche parte il metodo adoprato di sopra. Ora osservo, mancando in quest' esempio anche le centinaia al diminuendo, che prendendo ad imprestito un migliaio dalle 9 migliaia, questo è eguale a 9 centinaia, più 9 diecine, più dieci unità semplici, cioè

$$900+90+10;$$

che perciò unendo le 10 unità semplici alle due unità del diminuendo, e lasciando le 9 diecine alla colonna delle diecine, e le 9 centinaia alla colonna delle centinaia, la sottrazione sarà resa possibile, ed operando come negli antecedenti esempii otterremo per resto 1605.

16. Da tutto ciò potremo stabilire la seguente regola generale per la sottrazione: *Scritti i numeri come abbiamo detto sopra, si comincerà dal togliere la cifra dell' unità del diminutore dalla cifra dell' unità del diminuendo, le diecine dalle diecine, cc.; ed allorchè una delle cifre del diminutore è maggiore della sua corrispondente nel diminuendo, conviene aggiungere a questa dieci unità, togliendone una dall'ordine immediatamente superiore; e qualora questa sia zero, conviene prendere un' unità dall' ordine superiore più prossimo che ne abbia, aggiungere 10 unità all' ordine dell' unità sul quale si opera la sottrazione, e considerare tutti gli ordini intermedj, come diventati tanti 9; sicuri che la sottrazione non presenterà più alcuna difficoltà.*

17. I seguenti esempii e problemi potranno essere eseguiti dagli alunni per esercizio

47567	375432	7002045
23146	136728	3678939

Problema 1.° Newton nacque nel 1642, e morì nel 1727. A quale età è morto? — Ris. In età di anni 85.

Problema 2.° Si sa che son passati 2553 anni tra la nascita di Omero e l'anno 1845. Si domanda quanti anni avanti Gesù Cristo questa nascita ha avuto luogo? — Ris. Anni 708 avanti Gesù Cristo.

Problema 3.° Erostrato ha messo il fuoco al tempio di Diana 356 anni avanti la nostra era volgare. Quanti anni bisogna ancora aspettare, a cominciare dal 1845, perchè siano passati 3000 anni dopo questo avvenimento? — Ris. Dopo 799 anni.

Problema 4.° Nascono in Francia, ciascun anno, 498820 figli e 468674 figlie; ma muoiono 394346 persone di sesso mascolino e 387136 persone di sesso femminino. Di quanto aumenta la popolazione in un anno? — Ris. La popolazione si accresce annualmente di 186012 persone.

Problema 5.° Un generale avanti di entrare in campagna, aveva un' armata di 40000 uomini; ma nel tempo della guerra, 1644 uomini hanno disertato, 4732 sono stati fatti prigionieri, 5384 sono morti, 9315 sono stati feriti, e non sono più in istato di portare le armi. Da un' altra parte, esso ha ricevuti due differenti rinforzi, il primo di 6300 uomini, e il secondo di 3240 uomini. Quanti uomini gli rimangono attualmente sotto le armi? — Ris. Il numero di uomini attualmente sotto le armi ascende a 28465.

CAPITOLO QUINTO

Della Moltiplicazione

18. Per estinguere un mio debito ho dato 5 volte 78 monete. Quanto era questo debito?

È evidente che si giungerebbe a saperlo sommando 5 volte di seguito le 78 monete. Siccome quest' operazione sarebbe noiosa, così si è pensato di arrivare al resultato mediante un mezzo più facile e spedito. L' operazione della quale ci serviamo invece del sommare, ha preso il nome di *moltiplicazione.*

Possiamo quindi definire la *moltiplicazione un' operazione mediante la quale si ripete un numero tante volte, quante sono le unità contenute in un altro numero.* Perciò moltiplicare il numero 78 per 5 significa ripeterlo *cinque volte.*

Quest' operazione s' indica così; $5\times9=45$ (il segno $\times$ indica moltiplicazione) e si legge; 5 *moltiplicato per* 9 *dà per resultato* 45.

19. Il numero che si ripete un dato numero di volte, si chiama *moltiplicando.*

Il numero che indica quante volte il *moltiplicando* deve ripetersi si chiama *moltiplicatore.*

Ambedue questi numeri hanno il nome comune di *fattori.*

Il resultato della moltiplicazione si chiama *prodotto.*

20. È bene avvertire:

1.° Che lo zero, moltiplicato per qualunque numero, non dà verun prodotto.

2.° Che l' unità moltiplicata per se stessa dà l' unità: moltiplicata per un altro numero dà per prodotto quello stesso numero.

3.° Che il prodotto è sempre della medesima natura del moltiplicando, poichè è evidente che si trova questo prodotto ripetendo il moltiplicando tante volte quante sono le unità contenute nel moltiplicatore.

Da ciò si deduce che allorquando si moltiplicano delle diecine per un numero, si devono ottenere delle diecine. Egualmente, si deve avere per prodotto delle centinaia, se si moltiplicano delle centinaia; delle migliaia se si moltiplicano delle migliaia, e così di seguito.

21. Per ben eseguire una moltiplicazione è necessario d' imprimersi nella memoria la seguente

Tavola di Moltiplicazione

1 *via*	1 *fa*	1	3 *via*	3 *fa*	9	5 *via*	8 *fa*	40
1	2	2	3	4	12	5	9	45
1	3	3	3	5	15			
1	4	4	3	6	18	6 *via*	6 *fa*	36
1	5	5	3	7	21	6	7	42
1	6	6	3	8	24	6	8	48
1	7	7	3	9	27	6	9	54
1	8	8						
1	9	9	4 *via*	4 *fa*	16	7 *via*	7 *fa*	49
			4	5	20	7	8	56
2 *via*	2 *fa*	4	4	6	24	7	9	63
2	3	6	4	7	28			
2	4	8	4	8	32	8 *via*	8 *fa*	64
2	5	10	4	9	36	8	9	72
2	6	12				8	10	80
2	7	14	5 *via*	5 *fa*	25			
2	8	16	5	6	30	9 *via*	9 *fa*	81
2	9	18	5	7	35	9	10	90

22. Premesso ciò passiamo ad esaminare i diversi casi della moltiplicazione.

1.° Un numero di più cifre per un numero di una sola cifra.

Esempio. Si abbia da moltiplicare 3528 per 7.

Dispongo i due fattori come qui sotto: cioè

$$\begin{array}{r} 3528 \\ 7 \\ \hline 24696 \end{array}$$

Ora dico 7 via 8 fa 56; in 56 unità vi sono 6 unità e 5 diecine; pongo 6 sotto le unità del moltiplicando e ritengo le 5 diecine per unirle al prodotto delle diecine. In seguito passando alle diecine, 2 via 7 fa 14 e 5 delle diecine riportate dalla prima colonna fanno 19 diecine, ossia 9 diecine e un centinaio; pongo 9 sotto le diecine del moltiplicando e ritengo il centinaio per unirlo al prodotto delle centinaia. Per fare questo prodotto, dico: 5 via 7 fa 35 e 1 di riporto fa 36; in 36 centinaia vi sono 6 centinaia e tre diecine di centinaia, ovvero tre migliaia; pongo 6 al di sotto delle centinaia del moltiplicando e riporto tre al prodotto delle migliaia. Finalmente, moltiplicando le migliaia, dico: 3 volte 7 fa 21 e 3 di riporto fa 24. Siccome non vi sono altri prodotti da formare, pongo le 24 migliaia al di sotto delle migliaia del moltiplicando.

Il resultato 24696 è evidentemente il prodotto di 3528 per 7, poichè per formare questo resultato si è ripetuto 7 volte ciascuna delle parti del numero 3528.

Da ciò si vede che per eseguire la moltiplicazione di un numero di più cifre per un numero di una sola cifra, *si moltiplicheranno le unità di ciascun ordine del moltiplicando pel moltiplicatore*, ben inteso, *che si debbono aggiungere al prodotto parziale delle diecine, le diecine contenute in quello delle unità; al prodotto parziale delle centinaia, le centinaia contenute in quello delle diecine, e così di seguito.*

2.° Cerchiamo ora il prodotto di un numero di più cifre per un numero di più cifre, e per fissare le idee prendiamo a moltiplicare 675 per 327. Si comincia dal moltiplicare il 675 per 7, come precedentemente, e si ottiene 4725; quindi bisogna moltiplicare per due diecine o per 20, e per tre centinaia o per 300, poichè il numero 675 dev' essere ripetuto 327 volte. Ora il prodotto di 675 per 2 è 1350, e siccome 20 è 10 volte più grande di 2, così converrà rendere anche il prodotto 1350 dieci volte più grande: ma si rende un numero dieci volte più

grande, scrivendo uno zero alla sua destra, (n.° 4) così il prodotto di 675 per 20 sarà espresso da 13500. Ugualmente, poichè 300 è cento volte più grande di 3, e che il prodotto di 675 per 3 é 2025, così il prodotto per 300 sarà (n.° 4) 202500. Il prodotto totale dunque di 675 per 327 si compone dei tre prodotti *parziali* 4725, 13500, e 202500. L' addizione di questi tre numeri dà 220725.

Si può osservare che disponendo il calcolo come segue,

```
   675
   327
 ------
  4725
 1350
2025
 ------
220725
```

possiamo dispensarci di scrivere lo zero alla destra di 1350 e due zeri inseguito del numero 2025, semprechè il secondo prodotto parziale cominci al di sotto della cifra 2 che lo dà, le sue unità saranno così al posto delle diecine, e purchè il terzo prodotto parziale cominci al di sotto della terza cifra 3 che lo dà, le sue unità si troveranno al posto delle centinaia.

Da quest' esempio possiamo concludere la seguente regola generale. *Quando il moltiplicatore ha più cifre, si scrivono queste al di sotto di quelle che hanno il medesimo posto nel moltiplicando, quindi si moltiplica successivamente per ciascuna di queste cifre come se esso fosse solo. Ne resultano tanti prodotti parziali i quali debbono essere scritti in modo, che ciascuno cominci al di sotto della sua cifra moltiplicatrice. Dopo che tutti i prodotti parziali sono esauriti, se ne fa l' addizione, e la loro somma è il prodotto totale cercato.*

23. Allorquando uno dei due fattori, ovvero ambedue terminano con zeri, si fa la moltiplicazione senza

aver riguardo agli zeri, e quindi alla destra del prodotto totale si scrivono gli zeri che esistevano nei due fattori. Infatti: se per esempio si lasciano due zeri nel moltiplicando e uno nel moltiplicatore, si rende il primo 100 volte più piccolo e il secondo 10 volte; dunque mediante i due primi zeri lasciati il prodotto dev'essere 100 volte più piccolo, e mediante il secondo zero lasciato deve diminuire ancora 10 volte, esso è dunque in realtà 1000 volte minore che non dev'essere, poichè $100 \times 10 = 1000$. Per conseguenza perchè abbia il suo vero valore, conviene renderlo 1000 volte più grande che esso non è, e questo è quello che si fa scrivendo tre zeri alla destra del prodotto trovato.

Esempio. Si abbia da moltiplicare 730 per 300, si moltiplica 73 per 3, e si ottiene il prodotto 219, quindi si scrivono tre zeri alla destra di questo prodotto, perchè ve ne è uno nel moltiplicando e due nel moltiplicatore. Si ottiene così 219000 per 300 volte 730.

```
   730
   300
------
219000
```

24. Si abbia da moltiplicare 441 per 304

```
   441
   304
------
  1764
 1323
------
134064
```

Faccio il prodotto di 441 per 4; quindi siccome il prodotto di 441 per 0 è zero, così passo a moltiplicare 441 per 3, osservando di far cominciare al di sotto della cifra moltiplicatrice 3, il prodotto parziale 1323.

25. I seguenti esempii e problemi serviranno al solito per esercizio dei principianti

1.° 47758×4,	2.° 37056×7,
3.° 37956×175,	4.° 73826×709,
5.° 46007×879,	6.° 82017×10079
7.° 7300×36	8.° 75000×4800

Problema 1.° Moltiplicare 1 per 2, poi per 3, poi per 4 e successivamente per 5, per 6, per 7, per 8 e per 9 — Ris. 362880.

Problema 2.° La Francia ha 86 dipartimenti i quali contengono ciascuno, termine medio, 372093 anime. Qual è la popolazione di tutto il regno?—Ris. 31999998; cioè circa a 32 milioni.

Problema 3.° Qual somma si otterrebbe, se dopo aver moltiplicato 250540 per 10, si ripetesse questo prodotto 2458 volte? — Ris. 6158273200.

Problema 4.° Un'armata si compone di 12 battaglioni d'infanteria, contenenti ciascuno 954 uomini; di 6 squadroni di cavalleria contenenti ciascuno 210 uomini; e di 4 compagnie di artiglieria contenenti ciascuna 78 uomini; si domanda quanti uomini contiene quest'armata in tutto — Ris. 13020 uomini.

CAPITOLO SESTO

Della Divisione

26. Si vuol sapere quante volte l'8 può sottrarsi dal 56, ovvero si vuol dividere il 56 in 8 parti uguali, oppure si cerca quante volte il 56 contiene il numero 8.

È evidente che per rispondere a queste tre questioni, che in sostanza non sono che una sola, si dovrebbe sottrarre l'8 dal 56, quindi di bel nuovo l'8 dal resto, e poi l'8 dal nuovo resto, finchè il 56 non fosse esaurito

totalmente. Dunque l'8 sarà contenuto in 56 tante volte quante può essere sottratto, e questo numero di volte sarà una delle parti uguali in cui può dividersi il 56. Ma sarebbe molto lungo il risolvere tali questioni unicamente col mezzo della sottrazione ordinaria. Per questo motivo è stata inventata la *divisione*, la quale può definirsi come segue: *Un'operazione con la quale si cerca quante volte un numero chiamato dividendo contiene un altro numero chiamato divisore. Il resultato dell' operazione si chiama quoziente.*

27. Quest' operazione vien indicata così $56:8=7$ (i due punti indicano divisione, e si legge, 56 *diviso per* 8 dà 7). Si esprime ancora così $\frac{56}{8}=7$, e si legge ugualmente. Il 56 è il *dividendo*, il numero 8 il *divisore*, e il 7 il *quoziente.*

28. Siccome l'oggetto della divisione è di cercare quante volte il dividendo contiene il divisore; così se quindi si moltiplica il quoziente pel divisore si deve riprodurre il dividendo, poichè con quest' operazione si prende il divisore tante volte, quante esso è contenuto nel dividendo. Ogni dividendo deve dunque considerarsi come un prodotto, e il divisore come uno dei fattori. Laonde la divisione si potrà definire ancora nel seguente modo: *Un'operazione, mediante la quale dato il prodotto e uno dei fattori, si cerca l' altro fattore.*

29. Per poter prontamente eseguire la divisione sarà bene apprendere a memoria la seguente

Tavola di Divisione

2	*in*	2	*sta*	1 *volte*	3	*in*	3	*sta*	1 *volte*
2		4		2	3		6		2
2		6		3	3		9		3
2		8		4	3		12		4
2		10		5	3		15		5
2		12		6	3		18		6
2		14		7	3		21		7
2		16		8	3		24		8
2		18		9	3		27		9
2		20		10	3		30		10
4	*in*	4	*sta*	1 *volte*	5	*in*	5	*sta*	1 *volte*
4		8		2	5		10		2
4		12		3	5		15		3
4		16		4	5		20		4
4		20		5	5		25		5
4		24		6	5		30		6
4		28		7	5		35		7
4		32		8	5		40		8
4		36		9	5		45		9
4		40		10	5		50		10

6	*in*	6	*sta*	1 *volte*	7	*in*	7	*sta*	1 *volte*
6		12		2	7		14		2
6		18		3	7		21		3
6		24		4	7		28		4
6		30		5	7		35		5
6		36		6	7		42		6
6		42		7	7		49		7
6		48		8	7		56		8
6		54		9	7		63		9
6		60		10	7		70		10
8	*in*	8	*sta*	1 *volte*	9	*in*	9	*sta*	1 *volte*
8		16		2	9		18		2
8		24		3	9		27		3
8		32		4	9		36		4
8		40		5	9		45		5
8		48		6	9		54		6
8		56		7	9		63		7
8		64		8	9		72		8
8		72		9	9		81		9
8		80		10	9		90		10

Da questa tavola si potrà apprendere la divisione di molti numeri non maggiori di 90 per qualunque numero semplice; dico di molti numeri non di tutti quelli che sono fra 1 e 90; perchè molti di questi numeri intermedj non sono prodotti esatti. Infatti se vogliamo sapere quante volte il 7 entra in 61, si cerchi nella co-

lonna del 7 il prodotto minore, ma più vicino a 61; e si troverà 56 che è il prodotto di 7×8. Si dirà dunque che il 7 entra 8 volte nel 61 col resto 5, che è quello che manca dal 56 al 61.

30. Appresa a memoria l'antecedente tavola, passeremo a stabilire le regole necessarie per gli altri casi della divisione.

Si abbia in primo luogo da dividere un numero composto di più cifre per un numero espresso da una sola cifra; cioè: 8764 per 7.

Disponendo l'operazione come qui sotto, comincio dal dire, quante volte 7 sta in 8 mila; ma invece cerco semplicemente quante volte 7 sta in 8, e subito vedo che vi sta una volta. Quest' unitá rappresenta effettivamente mille, e siccome le cifre che verranno ad essa in seguito faranno che essa rappresenti il suo vero valore, così scrivo semplicemente 1 sotto il divisore.

Moltiplico il divisore 7 pel quoziente 1, e pongo il prodotto 7 sotto alla parte 8 del dividendo, già divisa, faccio la sottrazione ed ho 1 per resto.

Quest' avanzo 1 è la parte di 8 che non fu divisa, e rappresenta una diecina rapporto alla seguente cifra 7; perciò scrivo alla sua destra la stessa cifra 7 e continuo l'operazione dicendo 7 in 17 sta due volte, perciò scrivo 2 alla destra del primo quoziente 1.

Moltiplico come nella prima operazione il divisore 7 pel quoziente 2, pongo il prodotto 14 sotto al dividendo parziale 17, ne faccio la sottrazione e ho per resto 3; cifra che esprimerà la parte del dividendo parziale che non potè esser divisa.

Accanto all'avanzo 3 scrivo 6 terza cifra del dividendo; trovo che 7 in 36 sta 5 volte, e scrivo 5 alla destra dei primi due quozienti.

Moltiplico il divisore 7 per 5, ed avendo scritto il prodotto 35 sotto al nuovo dividendo parziale lo sottraggo, e mi resta 1 per resto.

Finalmente accanto a questo resto pongo la cifra 4

del dividendo, e scrivo 2 alla destra degli altri quozienti, poichè 7 in 14 sta due volte.

Moltiplico il divisore 7 pel nuovo quoziente 2, sottraggo il prodotto 14 ed ho zero per resto. Dunque il numero 8764 contiene il 7 tante volte, quante è indicato dal quoziente trovato, cioè 1252 volte.

```
Dividendo  8764 { 7     Divisore
           7    { 1252  Quoziente
           ----
           17
           14
           ----
            36
            35
            ----
             14
             14
             ----
              0
```

Infatti resulta evidentemente da tutte le precedenti operazioni, che si è sottratto successivamente 7 volte 1 migliaio, 7 volte 2 centinaia, 7 volte 5 diecine, 7 volte 2 unità; e poichè dopo tutte queste operazioni, non rimane niente, ne segue che 8764 è uguale al prodotto di 1252 per 7; così il numero 1252 è veramente il *quoziente* cercato.

31. Se nel corso dell' operazione si trova che alcuno dei dividendi parziali non contenga il divisore, si scrive zero in quoziente, e quindi si abbassa un'altra cifra del dividendo totale accanto di questo dividendo parziale, e si continua la divisione.

Si abbia da dividere 14464 per 8.

```
14464 { 8
 8    { 1808
 ---
 64
 64
 ---
  064
   64
  ---
    0
```

Prendo le due prime cifre del dividendo, poichè la sola prima non contiene il divisore, trovo che 14 contiene una volta 8, scrivo quindi 1 in quoziente, sottraggo il prodotto 8 da 14, ed ho 6 per resto, accanto del quale scrivo la terza cifra 4 del dividendo. Quindi dico 8 in 64 sta 8 volte, pongo 8 in quoziente, e moltiplicando pel divisore 8 ho 64, che sottratto da 64 non mi lascia resto: accanto allo zero scrivo 6 quarta cifra del dividendo, e siccome 6 non contiene l'8 scrivo 0 in quoziente, e quindi accanto al 6 abbasso la quinta cifra 4 del dividendo: 8 in 64 sta 8 volte, lo pongo in quoziente, quindi moltiplicandolo per 8 mi dà 64, che sottratto da 64 ho per resto 0. Laonde il numero 14464 contiene 1808 volte il numero 8.

32. Tutte le volte che il divisore è di una sola cifra, nella pratica si abbrevia la divisione come segue.

Si abbia da dividere il n.° 43164 per 6.

Dopo aver condotto una linea sotto al dividendo, si dice: il sesto di 43 è 7, che si scrive sotto la cifra 3, e siccome avanza 1, questa si riunisce col pensiero alla cifra seguente 1, il che dà 11; il sesto di 11 è 1 che si scrive alla destra del 7, e il resto 5 riunito alla cifra 6 dà 56; il sesto di 56 è 9, che si scrive alla destra delle

due cifre precedenti; finalmente il sesto di **24** è **4**. Dunque il quoziente cercato è 7194.

43164 | 6

7194

33. Da quanto sopra dedurremo la regola per eseguire la divisione di un numero di più cifre per un numero composto di una sola cifra, cioè: *Si scrive il numero di più cifre alla sinistra del numero di una cifra, separando questi due numeri per mezzo di una linea verticale. Quindi si prende a sinistra del dividendo una o due cifre, secondo quante ne abbisognano per contenere il divisore. Dopo ciò sotto le unità di questo primo dividendo parziale si scrive la prima cifra del quoziente. Il resto, se vi è, si unisce come diecine, alla cifra seguente del dividendo totale, per formare il secondo dividendo parziale; ma questo si ritiene col pensiero e non si scrive. Si pone la seconda cifra del quoziente accanto e alla destra della prima trovata, e si continua nello stesso modo, fino alle unità del dividendo dato.*

34. Per eseguire la divisione di un numero di più cifre per un numero composto di più cifre, si separano alla sinistra del dividendo tante cifre, quante son necessarie per contenere il divisore: quindi invece di cercare quante volte questa parte del dividendo contiene l'intero divisore, si cerca quante volte la prima cifra del divisore è contenuta nella prima cifra del dividendo, o nelle due prime se essa non basta: si scrive il quoziente sotto al divisore al solito. In seguito si moltiplicano secondo la regola indicata, tutte le cifre del divisore pel quoziente, e questo prodotto si scrive sotto alle corrispondenti cifre del dividendo parziale; fatta al solito la sottrazione si pone accanto al resto la cifra seguente del dividendo, e si continua quindi l'operazione nell'istesso modo.

Per render più chiaro questo processo passiamo ad

un caso il quale per se stesso contiene tutte le difficoltà che si possono incontrare nella divisione.

Si abbia da dividere 189492 per 375.

```
189492 { 375
1875   { ----
------    505
 1992
 1875
 ----
  117
```

Si separano alla sinistra del dividendo 4 cifre giacchè tre non contengono il divisore. Quindi si cerca quante volte 3 sta in 18; trovo 6, ma siccome moltiplicando 375 per 6 avrei un prodotto maggiore del dividendo 1894, così si scrive solamente 5 nel quoziente. Si moltiplica 375 per 5, e dopo avere scritto il prodotto 1875, sotto a 1894, se ne fa la sottrazione, e si ha 19 per avanzo.

Accanto a 19 abbasso la cifra 9 del dividendo, e siccome 199 non contiene 375, scrivo zero nel quoziente, e pongo accanto a 199 la cifra 2 del dividendo; ciò fatto, cerco quante volte 3 sta in 19: vi starebbe 6 volte; ma per la ragione di sopra accennata non scrivo che 5 nel quoziente, e dopo avere operato secondo il consueto, ho per resto 117.

35. Il metodo della divisione può rendersi molto più semplice, osservando che invece di fare il prodotto della cifra del quoziente pel divisore, e quindi togliere questo prodotto dal dividendo parziale, possiamo fare la sottrazione a mano a mano che si moltiplica ciascuna cifra del divisore. Ciò si renderà molto più chiaro mediante il seguente esempio.

Si abbia da dividere 8075 per 95.

Il primo dividendo parziale dev' essere 807 diecine, poichè 80 non contiene nemmeno una volta 95. Il quoziente non si comporrà perciò che di diecine e di unità. Dirò

dunque: in 80 quante volte 9? 8 volte per 72. Ma non so se 807, contenga 95, tante volte quante 80 contiene 9. Tento dunque il quoziente 8 avanti di scriverlo. Moltiplicando 95 per 8; e siccome ciò fatto ottengo un prodotto minore di 807, concludo che 8 volte 95 può essere tolto da 807 e quindi che 8 può essere la prima cifra del quoziente.

Dopo aver riconosciuto l'esattezza della prima cifra del quoziente, moltiplico il divisore per questa cifra e sottraggo realmente il prodotto da 807 diecine. Dico dunque: 8 volte 5, 40; tolto da 47 ho per resto 7; riporto 4. Scrivo il 7 al disotto della cifra 7 di 807, poichè provenendo da questa cifra esprime dell'unità della medesima specie. Dico in seguito: 8 volte 9, 72 e 4, 76; da 80, 4, scrivo questo resto 4 al di sotto dello zero di 80.

Accanto al resto 47, si abbassa l'ultima cifra 5 del dividendo totale, e si ottiene 475. Operando come sopra si trova per la seconda cifra del quoziente 5. Effettuando quest'operazione esattamente come per la cifra antecedente, si ottiene zero per resto. Dunque il quoziente completo di 8075 diviso per 95 è perciò 85.

8075	95
475	85.
0	

36. Da quello che abbiamo veduto fin qui, si deve concludere, che nella divisione, si debbono osservare quattro cose: 1.° Che il prodotto del divisore per la cifra che si pone in quoziente dev'esser sempre minore del dividendo parziale che si divide, ovvero essergli uguale; 2.° Che il resto di ciascuna divisione dev'esser sempre minore del divisore; 3.° Che non possiamo mai avere più di 9 al quoziente per ciascun dividendo parziale; 4.° Che dopo aver abbassato una cifra per formare un nuovo dividendo parziale, se succede che il divisore non vi sia contenuto, vale a dire che il dividendo parziale sia minore del divisore, bisogna mettere uno zero al quoziente e

abbassare un' altra cifra per formare il dividendo parziale seguente.

37. Avanti di eseguire una divisione potremo dire quante cifre avrà il quoziente. Infatti il primo dividendo parziale dà la prima cifra del quoziente, e ciascuna dell' altre cifre del dividendo totale serve a formare un altro dividendo parziale, che dà ancora una cifra in quoziente.

Esempio. Quante cifre avrà il quoziente del numero 31284 diviso per 230?

Il primo dividendo parziale sarebbe 312, e siccome resterebbero ancora due cifre, il quoziente ne avrà tre.

Il quoziente si dice completo tutte le volte che la divisione non ha resto; e in questo caso il divisore moltiplicato pel quoziente produce esattamente il dividendo.

Il quoziente si chiama approssimativo o incompleto quando la divisione ha un resto. In questo caso il divisore moltiplicato pel quoziente riproduce il dividendo, semprechè a questo prodotto vi si aggiunga il resto.

38. La regola della divisione quando il divisore e il dividendo hanno più cifre è la seguente. *Si prende alla sinistra del dividendo tante cifre, quante siano bastanti a contenere il divisore; quindi si cerca quante volte questo dividendo parziale contiene il divisore; con ciò si ottiene una cifra al quoziente; si moltiplica questa cifra pel divisore, e si sottrae il prodotto dallo stesso dividendo parziale: il che darà un resto, alla destra di questo resto si abbassa la cifra seguente del dividendo totale, e si ottiene così un nuovo dividendo parziale, sul quale opereremo come sul precedente. Si continuerà in questo modo finchè non siano esaurite tutte le cifre del dividendo dato.*

39. Quando il divisore non contiene che l'unità seguita da zeri, si può eseguire la divisione prontamente: cioè si dividono le cifre del dividendo in due gruppi; quello della destra contiene tante cifre quanti zeri sono nel divisore, e questo forma il resto della divisione; quello

della sinistra comprende tutte le altre cifre del dividendo, e dà il quoziente.

Si abbia da dividere 326 per 10. Divido il 326 in due gruppi di cifre: 32 e 6. Quello della sinistra 32 è il quoziente; quello della destra 6 è il resto, non vi è che una cifra, perchè il divisore 10 non ha che uno zero.

Il numero 32 è veramente la decima parte del 326, cioè 10 volte minore di 326, eccettuato il resto 6; poichè la cifra 2 che esprime delle diecine nel numero 326, esprime dell' unità semplici in 32, ec.

Ugualmente si otterrebbe sul momento 521 e resto 49, dividendo con questo metodo il numero 52149 per 100.

Se succede che i due termini della divisione siano terminati da zeri, possiamo senza alterare il quoziente sopprimerne un ugual numero nel dividendo e nel divisore.

Infatti si abbia da dividere 3020000 per 2500, sopprimo due zeri alla destra di ciascun termine; quindi divido 30200 per 25, e trovo per quoziente 1208, come se avessi diviso 3020000 per 2500, ed è evidente che deve succedere così, poichè la soppressione dei primi due zeri nel dividendo 3020000, lo rende 100 volte più piccolo, motivo per cui esso deve contenere il divisore 100 volte meno; ma la soppressione dei due zeri anche nel divisore 2500, rende questo 100 volte più piccolo, per cui senza la soppressione dei due zeri nel dividendo esso vi entrerebbe 100 volte più; dunque la simultanea soppressione dei due zeri tanto nel dividendo quanto nel divisore non deve assolutamente produrre alcuna variazione, e il quoziente deve resultare uguale a quello che si otterrebbe senza questa soppressione.

40. Daremo, al solito, termine a quest' operazione con alcuni esempii di divisione e problemi.

1.° 48 per 2, 2.° 369 per 3, 3.° 1080 per 4
4.° 5632 per 2, 5.° 20370 per 7 6.° 14568 per 8
7.° 3670 per 10, 8.° 49632 per 33
9.° 518400 per 7200, 10.° 735243 per 241

Problema 1.° Quanti giorni s'impiegherebbero a fare il giro della terra che è 9000 leghe, se si potesse andare in strada retta e camminare giorno e notte facendo una lega per ora? — Ris. In 375 giorni.

Problema 2.° Parigi ha 890431 abitanti, e si sa che essi consumano in ciascun anno, circa 4383928 ova. Quante ova ciascun abitante consumerebbe se ne consumassero tutti ugualmente? — Ris. tra 4 e 5.

Problema 3.° Qual è il numero che, essendo moltiplicato per 55, dia 156970 al prodotto? — Ris. 2854.

Problema 4.° Moltiplicando 256 per un numero incognito, il prodotto è 1792. Qual è questo numero? — Ris. 7.

Problema 5.° Per qual numero bisogna moltiplicare 54, per avere 9990 al prodotto? — Ris. 185.

CAPITOLO SETTIMO

Prove delle quattro regole

41. Fatta un' operazione la prima cosa che si cerca, si è di verificare se essa è bene eseguita; l' oggetto però del seguente capitolo si è di dare delle regole onde assicurarsi se un' addizione, una sottrazione, una moltiplicazione, ovvero una divisione è stata ben fatta.

Molte sono le regole per fare la riprova di una addizione, fra esse sceglieremo la seguente, attualmente più in uso dell' altre.

Si abbia da sommare

$$\begin{array}{r} 34078 \\ 7396 \\ 83629 \\ 47738 \\ 8962 \\ \hline 181803 \\ \hline 32330 \\ \hline \end{array}$$

Eseguita la somma dei numeri dati si ottiene 181803, per verificare se questa sia esatta, comincio dal sommare l' ultima colonna alla sinistra ed ho 15, invece nella somma trovata si ha 18, talchè la differenza da 18 a 15 è 3; ora questa differenza non può provenire che dalle ritenute che si son fatte quando si è fatto la somma della colonna delle migliaia, segno perciò sotto la cifra 8 il 3, e siccome 3 diecine di migliaia sono uguali 30 migliaia, che unite al migliaio che è scritto sotto alle migliaia, formano 31 migliaia, così sommando la colonna delle migliaia dovrei trovare 31, invece trovo 29, la differenza delle 2 migliaia, uguali a 20 centinaia, che segno al solito sotto le migliaia provengono dalle ritenute fatte nella somma delle centinaia; le quali aggiunte alle 8 centinaia danno 28 centinaia; sommo tutti i numeri della terza colonna e trovo 25; la differenza per arrivare a 28 è 3, che segno al solito; la somma della quarta è 27, differenza per andare a 30, 3; ora devo sommare l' ultima colonna, cioè la prima a destra, e siccome non vi sono più riporti è evidente che se la somma sarà bene eseguita dovrò trovare 33, il che succede: la differenza dunque per arrivare a 33 è zero, e quindi posso concludere che la somma proposta è esatta.

42. La riprova della sottrazione si farà sommando l' avanzo o resto col numero più piccolo, ed infatti è evidente che se l' operazione è ben fatta si deve in questo caso necessariamente ritrovare il numero più grande. Pongo il seguente esempio di una sottrazione con la sua riprova, e ciò a maggiore dilucidazione di quanto ho detto.

7006326
3678434
____
3327892
____
7006326

43. Dalle definizioni date per la moltiplicazione e per la divisione si deducono le regole necessarie per far rilevare se esse sono ben fatte.

Infatti nella moltiplicazione si ripete il moltiplicando (n.° 18) tante volte quante sono le unità contenute nel moltiplicatore, dunque si cerca quante volte il prodotto contiene il moltiplicando, vale a dire che se dividiamo il prodotto pel moltiplicando, dobbiamo trovare per quoziente il moltiplicatore; e siccome possiamo prendere il moltiplicando per moltiplicatore e viceversa, così possiamo stabilire in generale che: se si divide il prodotto di una moltiplicazione per uno dei fattori, si deve necessariamente ritrovare in quoziente l' altro fattore.

Similmente poichè il quoziente di una divisione indica quante volte il divisore è contenuto nel dividendo, ne segue che se prendiamo il divisore tante volte quante sono le unità contenute nel quoziente, vale a dire se si moltiplica il divisore pel quoziente, si deve ritrovare il dividendo, allorquando però la divisione non lascia verun avanzo; nel caso contrario conviene aggiungere questo avanzo al prodotto della moltiplicazione del quoziente pel divisore.

CAPITOLO OTTAVO

DI ALCUNE OPERAZIONI PARTICOLARI SOPRA I NUMERI

44. Un numero si dice *primo* quando non è divisibile esattamente che per se stesso e per l' unità: così sono numeri primi 7, 11, 2, 3, 1, ec. Due numeri come 12 e 35 che non hanno altro divisore comune che l' unità, si dicono *primi tra loro*.

45. Se si hanno più numeri uguali da moltiplicarsi insieme, il resultato di quest' operazione si chiama *potenza*.

Si chiama *grado* della potenza, la quantità dei numeri uguali moltiplicati tra loro.

Così $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$ esprime la quinta potenza di 7: essa s' indica così 7^5, scrivendo al di sopra del numero dato e alla destra, il numero che indica il grado della potenza. Il numero scritto al di sopra si chiama *esponente*.

L' *esponente* dunque indica quante volte un numero deve entrare come fattore in un prodotto.

Si chiama *radice* 2.ª, 3.ª, 4.ª, ... di un numero, un secondo numero il quale, elevato alla 2.ª, 3.ª, 4.ª . . . potenza, può dare il primo numero. Così 2 è la radice 2.ª del 4, perchè $2 \times 2 = 4$; 5 è la radice 2.ª del 25, perchè $5 \times 5 = 25$; 7 è la radice 3.ª del 343, perchè $7 \times 7 = 49$ e $49 \times 7 = 343$.

Le *radici* 2.ª e 3.ª si chiamano ancora *radici quadrate e cubiche.*

46. Occupiamoci ora del problema: dati due numeri trovare il numero più grande che gli divida nello stesso tempo ambedue: cioè, cerchiamo il *massimo comun divisore* di due numeri dati, e perchè la cosa riesca più semplice eseguiamo ciò sopra un esempio.

Si abbia da cercare il massimo comun divisore dei numeri 240 e 84. Si comincia dall' osservare che se 84 dividesse ambedue i numeri, esso sarebbe il massimo comun divisore cercato; poichè non vi può essere un numero maggiore di esso stesso che divida il numero 84. Si prova perciò la divisione di 240 per 84, e si ottiene un quoziente 2 e un resto 72, ossia (n.° 43)

$$240 = 84 \times 2 + 72 \; . \; . \; . \; . \; (1),$$

da ciò si conclude che 84 non è il massimo comun divisore dei numeri dati. Ora se si suppone che esista effettivamente un numero che divida esattamente i due numeri dati 240 e 84, dico che questo numero dovrà necessariamente dividere anche il resto 72 della divisione di 240 per 84, poichè dal supporre che esista un numero incognito che divida esattamente i numeri 240 e 84, ne viene la conseguenza, che eseguita la divisione otterrò due quozienti, espressi in numeri interi e senza resto alcuno; e qualora dividendo il 72 per questo nu-

mero incognito non avessi ugualmente un quoziente espresso in numeri interi e senza resto ne verrebbe che l' uguaglianza (1) sarebbe assurda, poichè da una parte avrei una quantità d' interi, uguale dall' altra parte ad una quantità d' interi più una frazione il che è impossibile; dunque quando esista un numero che divida esattamente i due numeri 240 e 84, esso deve dividere anche il resto 72. Mediante quest' osservazione la ricerca del massimo comun divisore è resa più semplice, e può eseguirsi sopra i due numeri 84 e 72. Sopra questi numeri si ragiona al solito come sopra gli antecedenti, e si conclude che il massimo comun divisore cercato non può eccedere il numero più piccolo 72, si tenta per mezzo della divisione di 84 per 72; se esso fosse, il massimo comun divisore, e siccome si ottiene un quoziente uno e un resto 12 si vede che non lo è neppure esso, si deduce da ciò come sopra

$$84 = 72 \times 1 + 12,$$

e ragionando ugualmente si vede che la ricerca del massimo comun divisore fra 84 e 72, può farsi sopra 72 e 12; infatti tentando se il 12 dividesse esattamente il 72, si ottiene un quoziente 6 senza verun resto, dai ragionanamenti fatti sopra si conclude che 12 è il massimo comun divisore, e che esso deve dividere ancora i numeri 84 e 240. Infatti eseguita la divisione di questi due numeri per 12 si ottengono i quozienti 20 e 7.

Possiamo con ciò stabilire che *per trovare il massimo comun divisore di due numeri dati si divide il più grande pel più piccolo, questo pel resto che si ottiene; questo primo resto pel nuovo resto, e così di seguito fintantochè si giunga ad un resto che divida esattamente il resto antecedente, dal che si deduce che esso dividerà tutti i resti antecedenti, ed anche i numeri dati.*

Ecco come nella pratica si eseguisce quest' operazione: si scrive il numero più piccolo sotto al più grande, e si separa alla destra questi due numeri per mezzo di

una linea verticale, accanto alla quale si scrivono sotto l'uno dell'altro i quozienti che di mano a mano si ottengono, scrivendo sotto al più piccolo numero il primo resto, sotto al primo resto il secondo ec., come si vede qui sotto

240	
84	2
72	1
12	6
0	

si dice 84 in 240 sta due volte col resto 72; questo resto 72 in 84 sta 1 volta col resto 12; finalmente 12 in 72 sta 6 volte col resto zero, e 12 perciò è il massimo comun divisore dei due numeri dati.

47. È evidente che, siccome i resti che si ottengono vanno continuamente diminuendo, dovremo necessariamente arrivare finalmente ad un resto che divida esattamente l'antecedente, quando ancora quest'ultimo resto non fosse che l'unità, nel qual caso concluderemo che i due numeri dati non hanno per divisore che l'unità, vale a dire che essi sono primi tra loro.

Ai seguenti due esempj applicati i ragionamenti di sopra, si troverà che i due numeri del primo esempio sono esattamente divisibili per 5 massimo comun divisore, e che quelli del secondo esempio sono primi tra loro, poichè si trova per ultimo resto delle successive divisioni l'unità.

1°.	2095		2.°	1399	
	395	5		404	3
	120	3		187	2
	35	3		30	6
	15	2		7	4
	5	3		2	3
	0			1	

48. Decomponiamo ora un numero nei suoi fattori primi. Si comincerà dal dividerlo per 2, tante volte di seguito quante si potrà, allora il numero proposto sarà

il prodotto di una potenza di 2 per un quoziente cognito non divisibile per 2. Si proverà ugualmente per i numeri primi 3, 5, 7, 11 ec. . . . . Il prodotto di tutti questi diversi numeri primi, elevati ad una potenza indicata dal numero delle divisioni che si saranno eseguite con quel dato numero, renderà il numero proposto.

Esempio. Per 360, si divida prima per 2, quindi il quoziente 180 per 2, e infine 90 per 2; siccome il terzo quoziente 45 non è più divisibile per 2, si avrà

$$360 = 2^3 \times 45:$$

si dividerà 45 per 3, quante volte si potrà, e si avrà

$$45 = 3^2 \times 5;$$

donde concluderemo

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5.$$

La decomposizione è terminata poichè 5 è numero primo.

Si trova ugualmente

$$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7.$$

Ordinariamente al calcolo si dà la disposizione che segue

360	2	210	2
180	2	105	3
90	2	35	5
45	3	7	7
15	3		
5	5		

49. Cerchiamo ora *il più piccolo numero divisibile per più numeri dati, allorchè questi numeri hanno dei fattori comuni.* La regola che dobbiamo adoperare per giungere alla soluzione di questa questione si è di decomporre ciascun numero dato nei suoi fattori primi mediante la regola data (n.° 48); di formare quindi il prodotto di tutti questi fattori primi elevati respettivamente alla più alta delle potenze, alle quali questi fattori si trovano elevati nei differenti numeri, tralasciando però i fattori uguali che sono elevati a potenze minori di quella

che si ritiene. Il prodotto così formato sarà il numero che si cerca.

Prima di tutto questo numero è divisibile per ciascun numero dato, poichè esso contiene tutti i fattori primi elevati ad una potenza almeno uguale a quella che entra in questo numero. Di più esso è il più piccolo numero divisibile per tutti i numeri dati; poichè, per contenere esattamente un numero qualunque, bisogna che esso contenga ciascun fattore primo ad una potenza almeno uguale a quella che entra in questo numero.

Un esempio renderà più chiaro l' esposto di sopra. Siano i numeri dati 24, 60, 128, 210, 360.

Questi numeri decomposti nei suoi fattori primi, mediante la regola esposta (n.° 48) danno

$$24=2^3\times3,\quad 60=2^2\times3\times5,\quad 120=2^3\times3\times5,$$
$$210=2\times3\times5\times7,\quad 360=2^3\times3^2\times5.$$

I soli fattori primi che entrano in questi numeri sono 2, 3, 5, 7; e le più alte potenze alle quali questi fattori primi si trovano elevati, sono 2^3, 3^2, 5, 7. Formando perciò il prodotto, si ottiene

$$2^3\times3^2\times5\times7=2520,$$

per il più piccolo numero divisibile per tutti i numeri dati. Infatti eseguendo la divisione del numero 2520 per i numeri dati 24, 60, 120, 210, 360, si ottengono i quozienti 105, 42, 21, 12 e 7.

50. I numeri si dicono *pari* quando sono divisibili per 2, ciò segue quando l' ultima cifra a destra è 0, 2, 4, 6, 8; *dispari* poi quando l' ultima cifra alla destra è 1, 3, 5, 7, 9.

CAPITOLO NONO

Delle Frazioni

51. La frazione come abbiamo veduto (n.° 2) è una o più parti dell' unità divisa in un numero qualunque di parti uguali.

Si esprime la frazione con due numeri posti l'uno al di sopra dell' altro, e separati mediante una linea, come $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{8}$, ec., che si enunciano dicendo un mezzo, due terzi, quattro quinti, sette ottavi, ec.

Il numero scritto al di sopra si chiama *numeratore*, e quello scritto al di sotto *denominatore*.

Il denominatore indica in quante parti uguali l'unità è stata divisa, il numeratore indica quante parti dell' unità contiene la frazione. Così la frazione $\frac{4}{5}$ indica che l' unità è divisa in cinque parti uguali, e che si prendono quattro di queste parti uguali.

Possiamo considerare la frazione come una divisione accennata e non eseguita, in cui il numeratore è il dividendo, e il denominatore il divisore.

52. Quando il numeratore è uguale al denominatore, la frazione è uguale all' intero o all' unità. Infatti se si avesse la frazione $\frac{5}{5}$, ciò indicherebbe che il tutto o l' unità fu divisa in cinque parti uguali, e che si presero 5 di queste parti: cioè si presero tutte le parti dell' unità o del tutto: vale a dire che si prese il tutto o l' unità intera; e ciò che equivale allo stesso: il 5 entra in 5 una volta. Dunque

$$\frac{5}{5}=1,\quad \frac{7}{7}=1,\quad \frac{12}{12}=1.$$

53. Si abbia ora la frazione $\frac{7}{5}$ il cui numeratore è maggiore del denominatore; si osserverà che siccome $\frac{5}{5}$ valgono un intero, dunque $\frac{7}{5}$ valgono più di un in-

tero. Potremo quindi stabilire che *una frazione il cui numeratore è maggiore del denominatore, vale più di un intero.*

Si abbia ancora $\frac{25}{5}$, siccome abbiamo veduto che quest' espressione equivaleva ad una divisione accennata, così eseguendo questa divisione di 25 per 5 si otterrà in quoziente 5.

Le frazioni che valgono un intero esatto, o più interi esatti si sono chiamate *apparenti*. Le frazioni poi maggiori di uno o più interi, come

$$\frac{7}{5}, \frac{12}{7}, \frac{23}{8}, \frac{17}{11}, \text{ ec.}$$

si sono chiamate *numeri frazionari.*

54. Si prenda attualmente la frazione $\frac{6}{7}$, e si raddoppi il numeratore, facendo $\frac{12}{7}$. È evidente che $\frac{12}{7}$ valgono il doppio di $\frac{6}{7}$. All' opposto se si prende la metà del numeratore della stessa frazione $\frac{6}{7}$ e si fa $\frac{3}{7}$, è pure evidente che $\frac{3}{7}$ valgono la metà di $\frac{6}{7}$.

Da ciò si vede, che se si raddoppia, si triplica, ec... il numeratore di una frazione, lasciando intatto il denominatore, si ottiene una frazione due, tre, ec. volte maggiore per quanto si è moltiplicato il numeratore. E se si diminuisce con dividere per due per tre ec.. . il numeratore, lasciando sempre intatto il denominatore, si ottiene una frazione due tre ec. volte minore della prima. Laonde possiamo stabilire che moltiplicando il nu-

meratore si moltiplica la frazione, dividendo il numeratore si divide la frazione, purchè il denominatore rimanga intatto.

55. Si raddoppi il denominatore della frazione $\frac{3}{4}$ facendo $\frac{3}{8}$, è evidente che $\frac{3}{8}$ sono la metà di $\frac{3}{4}$; infatti l'unità principale si è divisa in un numero doppio di parti dividendola in 8 parti invece di 4; dunque ciascuna parte della seconda frazione è la metà della prima; d'altra parte se ne sono prese il medesimo numero perchè il numeratore è rimasto intatto, dunque la frazione $\frac{3}{8}$ è metà della frazione $\frac{3}{4}$.

All'opposto se si prende la metà del denominatore e si fa $\frac{3}{2}$. È pure evidente ragionando come sopra che la frazione $\frac{3}{2}$ è due volte maggiore della frazione $\frac{3}{4}$.

Dunque se si raddoppia, si triplica, ec., il denominatore di una frazione, lasciando intatto il numeratore, si ottiene una frazione due, tre, ec. volte minore della prima per quanto si è moltiplicato il denominatore. E se si diminuisce con dividere per due, per tre ec., il denominatore di una frazione, lasciandone intatto il numeratore, si ottiene una frazione due o tante volte maggiore della prima, quante volte si è diminuito il denominatore. Vale a dire che moltiplicando o dividendo il denominatore di una frazione per un numero qualunque, si divide o si moltiplica la frazione per lo stesso numero, semprechè il numeratore rimanga il medesimo.

Da quanto sopra possiamo stabilire la seguente tavoletta.

Moltiplicando Dividendo	il numeratore	si moltiplica si divide	la frazione
Moltiplicando Dividendo	il denominatore	si divide si moltiplica	la frazione.

56. Dall' esposto di sopra, e da questa tavola si rileva ancora che non si altera il valore di una frazione, moltiplicando o dividendo i suoi due termini per uno stesso numero. Infatti si abbia la frazione $\frac{5}{8}$ e moltiplichiamo per 3 i due termini 5 e 8, otterremo $\frac{15}{24}$; l'unità principale prima della moltiplicazione era divisa in *otto* parti uguali: ora essa si trova divisa in 24 parti uguali. Ciascuno ottavo vale dunque tre ventiquattresimi, e cinque ottavi, valgono cinque volte tre ventiquattresimi, o quindici ventiquattresimi; vale a dire che le frazioni $\frac{5}{8}$ e $\frac{15}{24}$ hanno assolutamente il medesimo valore.

Reciprocamente, si passa dalla frazione $\frac{15}{24}$ alla frazione $\frac{5}{8}$, prendendo il terzo da ciascuno dei termini della prima; così la proposizione enunciata è vera in tutte le sue parti.

Da ciò si vede che vi possono essere delle frazioni espresse con numeri molto diversi, ed essere non ostante eguali fra loro.

Esempio $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{5}{10}=\frac{22}{44}=\frac{11}{22}$ ec.

Stabilite queste nozioni generali sopra le frazioni, si dovrebbe passare ad eseguire sopra le medesime le quattro operazioni principali, cioè addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione: faremo però precedere queste dalle due seguenti *trasformazioni* di un uso frequente e particolare al calcolo delle frazioni.

57. Abbiamo veduto (n.° 56) che vi possono essere delle frazioni che abbiano un medesimo valore, ma sieno espresse con termini differentissimi; ora è evidente che se avremo delle frazioni che abbiano i numeratori e i denominatori molto grandi, queste si calcoleranno molto peggio delle frazioni che hanno i più piccoli numeratori e denominatori; che perciò la prima operazione particolare alle frazioni, si è data una frazione ridurla ai suoi minimi termini senza alterarne il valore.

Abbiamo veduto ancora (n.° 56) che non si altera il valore di una frazione, quando si moltiplicano o si dividono i suoi due termini per uno stesso numero: da quest' osservazione si deducono i mezzi per giungere alla risoluzione della nostra questione.

Sia data la frazione $\frac{210}{360}$ comincio dal decomporre tanto il numeratore che il denominatore nei suoi fattori primi (n.° 48) ed ottengo

$$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7, \quad 360 = 2^3 \times 3^2 \times 5;$$

dunque

$$\frac{210}{360} = \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{2^3 \times 3^2 \times 5};$$

e mediante l' osservazione di sopra citata, è evidente che potremo sopprimere i fattori comuni tanto al numeratore che al denominatore, senza alterare il valore della frazione; il che darà

$$\frac{210}{360} = \frac{7}{2^2 \times 3} = \frac{7}{12}.$$

58. Questo metodo sebbene facilissimo molte volte non è adoprabile attesa la sua lunghezza, e per la difficoltà se i numeri sono molto grandi di decomporgli nei suoi fattori primi, motivo per cui si usa piuttosto il processo stabilito (n.° 46) dati due numeri trovare il loro massimo comun divisore; e siccome al detto numero esso vi è stato spiegato con tutte le particolarità necessarie, mi limiterò ad applicarlo solamente alle due seguenti frazioni; cioè

$$\frac{240}{468} \quad e \quad \frac{373}{729}$$

Si arrovesceranno le frazioni e se ne cercherà il loro massimo comun divisore, come si vede qui sotto, e secondo il processo citato sopra

468		729	
240	1	373	1
228	1	356	1
12	19	17	20
0		16	1
		1	16
		0	

La prima, dopo alcune divisioni dà un resto 12, il quale divide esattamente il resto antecedente; dunque 12 è il massimo comun divisore; e dividendo per questo numero tanto il numeratore che il denominatore della frazione proposta, si ottiene $\frac{240}{468} = \frac{20}{39}$. Per la seconda frazione spinta l' operazione fino al suo termine si trova il resto 1; dunque mediante quanto si disse al (n.° 47), si vede che essa è irriducibile, poichè i due numeri 373 e 729 non ammettono verun divisore comune.

59. La seconda operazione particolare alle frazioni si è quella, data più frazioni con denominatori diversi di ridurle al medesimo denominatore.

Siano date le due frazioni $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{5}$

Lo stesso principio che ci ha condotti a ridurre una frazione alla sua più semplice espressione, cioè, che non si altera il valore di una frazione moltiplicando o dividendo i suoi due termini per uno stesso numero, ci porta a risolvere questa questione. Infatti se si moltiplicano i due termini della frazione $\frac{2}{3}$ pel denominatore 5 della seconda frazione si otterrà la nuova frazione $\frac{10}{15}$; e se si moltiplicano i due termini della frazione $\frac{3}{5}$ per il denominatore 3 della frazione $\frac{2}{3}$ si otterrà l' altra $\frac{9}{15}$, le quali per quello che abbiamo detto (n.° 56) hanno lo stesso valore delle prime ed hanno uno stesso denominatore. Nella pratica si dispone l' operazione come qui sotto

$$\frac{2}{3},\quad \frac{3}{5}$$

$$\frac{10}{15},\quad \frac{9}{15}.$$

Siano ora date le frazioni $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$ e $\frac{5}{7}$.

È evidente che si troveranno ridotte ad avere uno stesso denominatore, se si moltiplicano i due termini della prima per il prodotto 5×7 dei denominatori della 2.ª e della 3.ª; quelli della seconda per il prodotto 3×7

dei denominatori della prima e della terza; e finalmente quelli della terza per il prodotto 3×5 dei denominatori della prima e della seconda. Infatti il nuovo denominatore della prima frazione si comporrà mediante il prodotto $3 \times 5 \times 7$, quello della seconda del prodotto $5 \times 3 \times 7$, e quello della terza $7 \times 3 \times 5$; ora siccome ciascuno dei tre prodotti si compone dei medesimi fattori, così è chiaro che eseguiti debbono resultare uguali; quì sotto si vedrà come si opera nella pratica

$$\frac{2}{3} \qquad \frac{3}{5} \qquad \frac{5}{7}$$

$$\frac{2 \times 5 \times 7}{3 \times 5 \times 7}, \quad \frac{3 \times 3 \times 7}{5 \times 3 \times 7}, \quad \frac{5 \times 3 \times 5}{7 \times 3 \times 5},$$

ed eseguendo le moltiplicazioni

$$\frac{70}{105}, \quad \frac{63}{105}, \quad \frac{75}{105}.$$

Se le frazioni fossero più di tre si ridurrebbero queste al medesimo denominatore, moltiplicando i due termini di ciascuna frazione per il prodotto dei denominatori di tutte le altre.

60. In alcuni casi può questo metodo ridursi molto più breve; ciò succede quando nei denominatori esistono dei fattori comuni; infatti col metodo esposto non si cerca che dei numeri per i quali moltiplicando i due termini di ciascuna frazione, queste vengano ad avere uno stesso denominatore. Ora siccome quando vi sono dei fattori comuni a tutti i denominatori, è evidente dall' operazioni di sopra eseguite che essi entrano in ciascuna frazione nei due termini; e siccome non si altera il valore di una frazione quando si dividono i suoi due termini per uno stesso numero; così questi fattori comuni potranno sopprimersi avanti di eseguire l' operazione. A far ciò potremo servirci del

metodo esposto (n.° 49): cioè, dati più numeri cercare il minimo numero divisibile per tutti gli altri.

Siano date le frazioni

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{6}, \frac{5}{8}, \frac{7}{16}, \frac{5}{20}, \frac{3}{35}$$

Comincio dal cercare il più piccolo numero che sia divisibile per tutti i denominatori dati. Decompongo perciò questi denominatori nei suoi fattori primi, ed ottengo

$$3=3,\ 4=2^2,\ 6=2\times3,\ 8=2^3,$$

$$16=2^4,\ 20=2^2\times5,\ \text{e}\ 35=5\times7.$$

Ora i fattori primi da ritenersi secondo il metodo del n.° 49 sono $3\times2^4\times5\times7$ dai quali, eseguite le moltiplicazioni, si ottiene il numero 1680; si divide questo numero per i denominatori, 3, 4, 6, 8, 16, 20, 35 e si ottengono i quozienti 560, 420, 280, 210, 105, 84, e 48; scritti questi respettivamente al di sotto del denominatore che gli ha dati, e moltiplicando i due termini di ciascuna frazione pel numero che si trova al di sotto, si otterranno le nuove frazioni ridotte al medesimo denominatore. Ecco qui sotto come si dispone ed eseguisce l' operazione dopo trovati i respettivi quozienti

$$\frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{6},\ \frac{5}{8},\ \frac{7}{16},\ \frac{5}{20},\ \frac{3}{35}$$

560, 420, 280, 210, 105, 84, 48 Quozienti

$$\frac{1120}{1680},\ \frac{1260}{1680},\ \frac{280}{1680},\ \frac{1050}{1680},\ \frac{735}{1680},\ \frac{420}{1680},\ \frac{144}{1680}$$

61. Quest' operazione può subire l' ultimo grado di semplicità, quando s' incontra un denominatore che contenga tutti gli altri.

Siano date le frazioni

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{6},\ \frac{5}{9},\ \frac{7}{18},\ \frac{5}{36}$$

$$18,\ 12,\ 9,\ 6,\ 4,\ 2,\ 1$$

$$\frac{18}{36},\ \frac{24}{36},\ \frac{27}{36},\ \frac{30}{36},\ \frac{20}{36},\ \frac{14}{36},\ \frac{5}{36}.$$

Siccome 36 contiene tutti i denominatori, così si divide il denominatore 36 per tutti gli altri e si ottengono i quozienti 18, 12, 9, 6, 4, 2, 1, i quali scritti respettivamente sotto a ciascuna frazione come si vede sopra, e quindi moltiplicato ciascuno per i due termini della frazione che gli sta al di sopra, si ottengono le nuove frazioni ridotte al medesimo denominatore.

Esposte queste due operazioni particolari alle frazioni, passiamo ad eseguire le quattro operazioni sopra le medesime; cioè.

Addizione, Sottrazione, Moltiplicazione e Divisione delle Frazioni.

62. La somma delle frazioni non presenta veruna difficoltà; se queste hanno lo stesso denominatore se ne sommano i numeratori, e si divide questa somma pel denominatore comune; se il numeratore della nuova frazione resulta maggiore del denominatore, si divide il primo pel secondo per estrarne gli interi che vi potessero essere compresi. Nel caso poi che le frazioni proposte non avessero lo stesso denominatore si comincia dal ridurvele, e quindi nel resto si opera come abbiamo detto.

Esempio 1.° Si abbiano da sommare le frazioni

$$\frac{5}{17}+\frac{7}{17}+\frac{11}{17}+\frac{3}{17}.$$

La somma dei numeratori è $5+7+11+3=26$;

cioè $\frac{26}{17}$, e siccome $\frac{26}{17}$ sono uguali a 1 intero più $\frac{9}{17}$, così potremo stabilire

$$\frac{5}{17}+\frac{7}{17}+\frac{11}{17}+\frac{3}{17}=\frac{26}{17}=1+\frac{9}{17}.$$

Esempio 2.° Si abbiano le frazioni

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\frac{5}{9},$$

delle quali si cerchi la somma. Ridotte allo stesso denominatore le nuove frazioni saranno (n.° 60)

$$\frac{48}{72}+\frac{54}{72}+\frac{60}{72}+\frac{63}{72}+\frac{40}{72}.$$

La somma dei numeratori è

$$48+54+60+63+40=265:$$

cioè, $\frac{265}{72}$, ossia 3 interi più $\frac{49}{72}$; Laonde avremo

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\frac{5}{9}=\frac{265}{72}=3+\frac{49}{72}.$$

Nel caso che si avessero degli interi uniti a frazioni, si comincerà dal fare la somma delle frazioni col metodo esposto di sopra, quindi porteremo gli interi che possono esistere nella somma delle frazioni, per unirgli alla colonna dell' unità, e nel rimanente opereremo al solito.

63. La sottrazione, si eseguirà nel seguente modo, se le frazioni hanno lo stesso denominatore, si prenderà la differenza dei numeratori, e si darà a questa differenza il denominatore comune. Se non hanno lo stesso denominatore si comincerà dal ridurvele, e quindi opereremo come è stato detto sopra.

Esempio 1.° Si abbia da sottrare $\frac{5}{9}$ da $\frac{7}{9}$; siccome la differenza dei numeratori, è 2, così il resultato sarà $\frac{2}{9}$, vale a dire che avremo

$$\frac{7}{9}-\frac{5}{9}=\frac{2}{9}.$$

Esempio 2.° Si cerchi la differenza che passa dalla frazione $\frac{3}{4}$ alla frazione $\frac{5}{9}$: porremo

$$\frac{3}{4}-\frac{5}{9}$$

Ridotte al medesimo denominatore danno $\frac{27}{36}-\frac{20}{36}$, ossia $\frac{7}{36}$; dunque

$$\frac{3}{4}-\frac{5}{9}=\frac{7}{36}.$$

Si abbia finalmente da togliere $17\frac{3}{4}$ da $25\frac{2}{9}$. Nella pratica disporremo il calcolo come qui sotto

$$\begin{array}{r} 25\,\frac{2}{9} \\ 17\,\frac{3}{4} \\ \hline 7\,\frac{17}{36}. \\ \hline \end{array}$$

Cominceremo dal ridurre le due frazioni $\frac{2}{9}$ e $\frac{3}{4}$ allo stesso denominatore, onde renderne possibile la sottrazione, ed avremo $\frac{8}{36}$ e $\frac{27}{36}$; e siccome da $\frac{8}{36}$ non possiamo togliere $\frac{27}{36}$, prenderemo dalle 25 unità un'unità e osserveremo che questa è eguale a $\frac{36}{36}$ (n.° 52) i quali uniti agli $\frac{8}{36}$ danno $\frac{44}{36}$. Resa così possibile la sottrazione, fatta la differenza dei numeratori avremo $44 - 27 = 17$, porremo quindi sotto la frazione $\frac{3}{4}$, la nuova frazione $\frac{17}{36}$; e passeremo in seguito a cercare la differenza degli interi, rammentandoci che il 25 è diminuito di un' unità, della quale ci siamo serviti per rendere possibile la sottrazione fra le due frazioni $\frac{2}{9}$ e $\frac{3}{4}$; fatta quest' osservazione troveremo per la differenza cercata $7\ \frac{17}{36}$.

64. Prima di devenire ad eseguire la moltiplicazione, cominciamo da cercare come può farsi per ridurre ad un numero frazionario una quantità d'interi più una frazione.

Si abbia per esempio 7 e $\frac{5}{9}$ da ridurre tutto ad un numero frazionario; siccome un'unità è uguale a $\frac{5}{5}$, $\frac{7}{7}$, $\frac{9}{9}$ ec. (n.° 52); così rimane evidente che 7 unità saranno

uguali a $\frac{9}{9}$ ripetuti sette volte, cioè $\frac{63}{9}$, ai quali aggiunti i $\frac{5}{9}$ avremo pel numero frazionario cercato $\frac{68}{9}$ e così potremo stabilire che in qualunque caso simile, *si moltiplica l'intero pel denominatore della frazione, si aggiunge a questo prodotto il numeratore, e si dà alla somma il denominatore della frazione.*

65. Nella moltiplicazione si possono dare diversi casi 1.° Che si abbia una frazione da moltiplicare per un intero; 2.° Un intero per una frazione; 3.° Una frazione per una frazione; 4.° Degli interi uniti ad una frazione per degli interi uniti ad una frazione.

Nel 1.° caso, siccome si stabilì (n.° 18) che moltiplicare un numero per un altro, significava ripetere il primo tante volte quante unità erano contenute nell' altro; così evidentemente si vede che dovremo ripetere la frazione data tante volte, quante saranno le unità contenute nell' intero moltiplicatore, il che si ridurrà a ripetere un numero di volte delle frazioni di egual numeratore, e con un denominatore pure uguale; dunque giungeremo a ciò con *moltiplicare il numeratore della frazione data per l' intero, dare a questo prodotto per denominatore il denominatore della frazione; e quindi estrarne gli interi se ve ne siano contenuti.*

Esempio 1.° Si abbia da moltiplicare $\frac{3}{5}$ per 7; operando secondo la regola stabilita si ottiene $\frac{21}{5}$ ossia 4 interi e $\frac{1}{5}$; vale a dire che nella pratica potremo fare

$$\frac{3}{5}\times 7=\frac{21}{5}=4+\frac{1}{5}.$$

Esempio 2.° Si abbia da moltiplicare $\frac{7}{9}$ per 9. Operando come sopra si ottiene

$$\frac{7}{9}\times 9=\frac{63}{9}=7.$$

In questo caso, come nei casi simili, potremo osservare che tutte le volte che il moltiplicatore è uguale al denominatore, si ottiene per prodotto il numeratore della frazione da moltiplicarsi. Ciò è evidente, poichè mediante la moltiplicazione che si fa del numeratore per l'intero, s'introducono nel prodotto i fattori dell'intero; dunque tutte le volte che ve ne saranno degli uguali, questi cercando il massimo comun divisore dei numeri che resultano si distruggeranno, e il prodotto dovrà restare uguale al numeratore: nel caso che il denominatore sia uguale all'intero moltiplicatore, ovvero negli altri casi dovrà rendersi più semplice, mediante la soppressione dei fattori che vi possono essere comuni. Operazione che potremo facilitare facendo la soppressione dei fattori comuni, prima di eseguire la moltiplicazione.

Si abbia $\frac{3}{5}$ da moltiplicarsi per 5, mediante quest'osservazione si vede subito che il suo prodotto è 3.

Si abbia ora $\frac{5}{8}$ da moltiplicarsi per 6; siccome nel 6 vi è il fattore 2 che si trova ancora nel numero 8, potremo cominciare dal sopprimerlo, ed allora avremo da moltiplicare $\frac{5}{4}$ per 3 il che dà $\frac{15}{4}$ ossia $3\frac{3}{4}$.

I due casi che seguono, cioè moltiplicare un intero per una frazione, e una frazione per una frazione, possono riunirsi in un solo. Ora si sa che quando si moltiplica qualunque numero per l'unità, equivale

a ripetere questo numero una volta, quindi esso rimane tale quale è. Premesso ciò si abbia da moltiplicare $\frac{2}{3}$ per $\frac{2}{5}$, il prodotto mediante la fatta osservazione sarà minore del moltiplicando $\frac{2}{3}$. Comincio da moltiplicare $\frac{2}{3}$ pel numeratore 2 ed ottengo $\frac{4}{3}$; questo prodotto però è troppo grande 5 volte, perchè io non dovevo ripetere la frazione $\frac{2}{3}$ due volte, ma bensì $\frac{2}{5}$ di volta; per rettificarlo adunque siccome una frazione si rende 5 volte più piccola, o dividendo il numeratore ovvero moltiplicando il denominatore per 5, così moltiplicherò il denominatore 3 per 5, e il mio prodotto sarà $\frac{4}{15}$. Laonde per *moltiplicare una frazione per una frazione si moltiplica il numeratore per il numeratore, e il denominatore pel denominatore, e si dividono i prodotti l'uno per l'altro.*

Esempii. Si abbia da moltiplicare $4\times\frac{7}{9}$ e $\frac{8}{9}\times\frac{5}{7}$. nel 1.° caso comincio da moltiplicare il 4 per 7 ed ho 28, divido quindi per 9, e il prodotto di 4 per $\frac{7}{9}$ è $\frac{28}{9}=3\frac{1}{9}$. Nel 2.° caso $8\times5=40$, e $9\times7=63$; dunque

1.° $4\times\frac{7}{9}=\frac{28}{9}=3\frac{1}{9}$. 2.° $\frac{8}{9}\times\frac{5}{7}=\frac{40}{63}$.

Finalmente si abbia da moltiplicare $3\frac{5}{7}$ per $4\frac{8}{9}$. Comincio dal ridurre il moltiplicando e il moltiplicatore ad un solo numero frazionario (n.° 64) ed ho $3\frac{5}{7}=\frac{26}{7}$, e $4\frac{8}{9}=\frac{44}{9}$; non rimane ora che da moltiplicare $\frac{26}{7}$ per $\frac{44}{9}$, il che si fa come sopra. Ecco come nella pratica si dispone ed eseguisce l' operazione

$$3\frac{5}{7}\times4\frac{8}{9}=\frac{26}{7}\times\frac{44}{9}=\frac{1144}{63}=18+\frac{10}{63}.$$

66. Nella divisione il primo caso che si presenta, si è dividere una frazione per un numero intero. Per dividere una frazione per un numero intero, si divide il numeratore per questo numero, e se ciò non è possibile si moltiplica il denominatore per lo stesso. Infatti in ambedue i modi si ottiene l' intento, poichè col primo le parti in cui l' unità è stata divisa sono rimaste le medesime, e se ne sono prese la metà, il terzo, ec. . . . . nel secondo si è preso il medesimo numero di parti, ma queste parti si sono rese due, tre ec. volte più piccole.

Si abbia da dividere $\frac{8}{9}$ per 4 e quindi $\frac{5}{7}$ per 6. Nel primo caso dividerò il numeratore 8 per 4 ed otterrò $\frac{2}{9}$, e nel secondo moltiplicherò il denominatore 7 per 6 il che mi darà $\frac{5}{42}$: Cioè

$$\frac{8}{9}:4=\frac{2}{9} \quad \text{e} \quad \frac{5}{7}:6=\frac{5}{42}$$

Passiamo ora al caso in cui si abbia da dividere una frazione per un' altra. In questo caso bisogna moltiplicare la frazione dividendo per la frazione divisore rovesciata, o ciò che equivale al medesimo, bisogna moltiplicare in croce, cioè il numeratore del dividendo pel denominatore del divisore, il che forma il numeratore del quoziente; quindi il denominatore del dividendo per il numeratore del divisore, il che forma il denominatore del quoziente.

Esempio. Si abbia da dividere $\frac{5}{7}$ per $\frac{3}{4}$, per eseguire questa divisione col primo metodo arrovescio la frazione divisore $\frac{3}{4}$ ed ho $\frac{4}{3}$, ora moltiplicando la frazione $\frac{5}{7}\times\frac{4}{3}$ ottengo per quoziente $\frac{20}{21}$. Col secondo metodo moltiplico il numeratore 5 pel denominatore 4 e il numeratore del quoziente è 20, quindi il denominatore 7 pel numeratore 3 e il denominatore del quoziente è 21. Nella pratica si dispone ed eseguisce come segue

$$\frac{5}{7}:\frac{3}{4}=\frac{5}{7}\times\frac{4}{3}=\frac{20}{21},\ \text{ovvero}\ \frac{5}{7}:\frac{3}{4}=\frac{20}{21}.$$

Il resultato è giusto, poichè se si comincia dal dividere $\frac{5}{7}$ per 3, s' impiega un divisore quattro volte troppo grande, e per conseguenza il quoziente $\frac{5}{21}$ che si otterrebbe in questo caso è quattro volte troppo piccolo. Per ottenere il vero quoziente rimane dunque da moltiplicare $\frac{5}{21}$ per 4, il che dà $\frac{20}{21}$.

La divisione di un numero intero per una frazione, si fa moltiplicando questo numero per il denominatore e si divide il prodotto pel numeratore della frazione. Si abbia da dividere

$$4 : \frac{7}{9} = \frac{36}{7} = 5\,\frac{1}{7}$$

Rimane finalmente da considerare il caso in cui si abbia da dividere degli interi con frazioni per degli interi con frazioni. Si comincia dal ridurre tanto il dividendo che il divisore ad un numero frazionario, e si eseguisce quindi la divisione come nel caso in cui si abbia da dividere una frazione per una frazione. Esempio; si debba dividere $5\frac{7}{8} : 3\frac{5}{9}$; ecco come si dispone ed eseguisce secondo quello che abbiamo detto quest'operazione nella pratica.

$$5\frac{7}{8} : 3\frac{5}{9} = \frac{47}{8} : \frac{32}{9} = \frac{47}{8} \times \frac{9}{32} = \frac{423}{256} = 1\,\frac{167}{256}.$$

Termineremo la teoria delle frazioni ordinarie, mediante utili applicazioni da eseguirsi per esercizio dagli alunni.

67. Ecco qui riunite tutte le applicazioni alle regole esposte per le frazioni, sopra delle quali potranno esercitarsi gli studiosi.

Ridurre alla sua più semplice espressione; cioè, trovare il massimo comun divisore delle frazioni $\frac{250}{575}$, $\frac{576}{1296}$, $\frac{2625}{3000}$, $\frac{1080}{1215}$, $\frac{330}{462}$ e $\frac{3660}{9024}$.

Ridurre al medesimo denominatore le seguenti frazioni.

(1.°) $\frac{7}{15}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$ e $\frac{4}{5}$, (2.°) $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{13}{21}$,

(3.°) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ e $\frac{7}{10}$, (4.°) $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{13}$, $\frac{8}{17}$ e $\frac{15}{19}$

(5.°) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{9}{11}$ e $\frac{12}{13}$, (6.°) $\frac{5}{16}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{32}$ e $\frac{17}{64}$

I sopranotati sei esempii potranno servire di esercizio anche per la somma.

Esempii di Sottrazione

(1.°) $\frac{7}{8}-\frac{5}{9}$, (2.°) $\frac{17}{18}-\frac{3}{5}$, (3.°) $\frac{23}{27}-\frac{17}{36}$

Moltiplicazione

$\frac{17}{18}\times 5$, $\frac{33}{37}\times 21$, $\frac{7}{9}\times 5$, $7\times\frac{3}{5}$, $17\times\frac{5}{8}$, $31\times\frac{2}{3}$;

$\frac{7}{8}\times\frac{5}{9}$, $\frac{3}{5}\times\frac{5}{7}$, $\frac{7}{8}\times 8$, $17\frac{2}{3}\times 35\frac{3}{4}$

Divisione

$\frac{17}{24}:7$, $\frac{31}{32}:13$, $\frac{8}{17}:4$, $19:\frac{3}{4}$, $7:\frac{23}{24}$,

$\frac{17}{18}:\frac{5}{16}$, $\frac{7}{9}:\frac{3}{4}$, $17\frac{3}{5}:23\frac{7}{9}$, $\frac{11}{12}\times 3\frac{7}{8}$.

Problemi relativi alle frazioni.

Problema. 1.° Un viaggiatore ha fatto il primo giorno 7 leghe e $\frac{1}{2}$, il secondo giorno 9 leghe e $\frac{7}{8}$, il terzo giorno 14 leghe e $\frac{5}{9}$, e il quarto giorno 5 leghe e $\frac{3}{7}$; quante leghe avrá fatto in questi quattro giorni? — Ris. $37\frac{181}{504}$.

Problema. 2.° Un equipaggio di un bastimento non ha viveri che per 15 giorni; ma le circostanze debbono fargli tenere il mare ancora per 20 giorni. Si domanda a quanto si deve ridurre la razione di ciascun giorno? — Ris. a $\frac{3}{4}$.

Problema 3.° Una guarnigione non ha viveri che per 25 giorni; ma tenendo ancora 5 giorni, essa può sperare soccorso. Si domanda in questo caso, a quanto bisogna ridurre la razione di ciascun soldato? — Ris. a $\frac{5}{6}$.

Problema. 4.° Che rimane di una cosa di cui se ne sono levati i $\frac{3}{7}$? Ris. $\frac{4}{7}$.

Problema. 5.° Che rimane di una cosa dalla quale se ne è levato prima il terzo e poi il quarto? — Ris. $\frac{5}{12}$.

Problema. 6.° Quali sono i due terzi di 44? — Ris. $29\frac{1}{3}$.

Problema 7.° Quali sono i due terzi di tre quarti di 56? — Ris. 28.

Problema 8.° Un viaggiatore ha da fare 48 leghe in tre giorni. Il primo giorno fa i $\frac{2}{5}$ della strada; il secondo giorno, ne fa $\frac{1}{3}$. Si domanda quante leghe ha fatto ciascun giorno? — Ris. 1.° giorno, leghe $19\frac{1}{5}$; 2.°, leghe 16 e 3.° leghe $12\frac{4}{5}$.

Problema 9.° Un corriere fa una lega e $\frac{3}{4}$ per ora; vi sono 100 leghe da fare e deve giungere il 4 Maggio 1845 a 9 ore e $\frac{1}{4}$ della sera. In qual giorno e in qual' ora deve partire? Si suppone che cammini giorno e notte senza fermarsi. — Ris. Alle ore 12 $\frac{3}{28}$ della mattina del dì 2 Maggio 1845.

Problema 10.° Un viaggiatore fa 4 leghe in 5 ore; quant' ore impiegherà a far 10 leghe? — Ris. ore 12 $\frac{1}{2}$.

Problema 11.° Un operajo fa i $\frac{2}{7}$ del suo lavoro in 3 giorni. Quanti giorni impiegherà a farlo tutto? — Ris. Giorni 10$\frac{1}{2}$.

Problema 12.° In $\frac{2}{3}$ di giorno un operaio ha fatto i $\frac{3}{11}$ del suo lavoro. In quanti giorni lo farà completamente? Ris. In giorni 2 e $\frac{4}{9}$.

CAPITOLO DECIMO

Delle Frazioni Decimali

68. Abbiamo veduto nel capitolo antecedente che non si potevano esprimere nè rappresentare le frazioni, se non che con due numeri da noi chiamati *numeratore* l' uno,

denominatore l' altro, ed abbiamo certamente dovuto rimanere convinti che il sistema dei numeri frazionari è più complicato di quello dei numeri interi.

Conoscendo adunque che il sistema dei numeri frazionari fin qui adottato non produce nel calcolo delle frazioni la facilità e semplicità che può desiderarsi, esaminiamo se si potesse adottare un miglior sistema il quale renda questa teoria più facile di quella praticata fin qui.

Per eseguir ciò, rammenteremo che dietro i principii che sono stati stabiliti nel nostro sistema di numerazione, qualunque cifra situata alla destra di un' altra, vale dieci volte meno che se essa fosse situata alla sua sinistra. Ora, un decimo è dieci volte più piccolo dell' unità, e mediante quanto sopra, è naturale lo scrivere i decimi alla destra dell' unità semplici, come si scrivono queste unità alla destra delle diecine. All' oggetto poi d'impedire qualunque confusione, si mette una virgola fra le unità semplici e i decimi.

Esempii: Il numero 7,3 indica 7 unità e 3 decimi di unità; il numero 216,4 esprime 216 unità e 4 decimi di unità.

Proseguendo a ragionare come l' abbiamo fatto per i decimi, si vedrà che i centesimi debbono essere scritti alla destra dei decimi, i millesimi a quella dei centesimi, e così di seguito.

Esempii: Il numero 3,37 esprime tre interi e 37 centesimi; il numero 0,607 esprime poi *zero* interi e 607 millesimi.

Dall'esposto di sopra si vede chiaramente che il sistema di numerazione delle frazioni decimali è simile a quello dei numeri interi, vale a dire che ciascuna parte decimale è dieci volte più forte di quella che la segue alla destra, e dieci volte minore di quella che la precede a sinistra.

Per conseguenza, una cifra decimale è una diecina relativamente alla prima che viene alla destra di essa, e centinaia relativamente alla seconda; tale che, vi vogliono 10 centesimi per formare un decimo, e dieci millesimi per formare un centesimo; dunque sono necessari 100 millesimi per formare un decimo e così di seguito.

69. I centesimi e le altre parti decimali si rappresentano come segue. I centesimi essendo dieci volte minori dei decimi hanno il loro posto alla destra di queste parti, cioè al secondo posto dopo la virgola. Per simili ragioni si pone i millesimi in seguito dei centesimi, cioè al terzo posto dopo la virgola, i diecimillesimi al quarto posto, i centomillesimi al quinto posto, e così di seguito.

Il numero 8,035042, esprime 8 unità, 0 decimi, 3 centesimi, 5 millesimi, o diecimillesimi, 4 centomillesimi e 2 millionesimi.

Le cifre che sono alla destra della virgola, per esprimere le parti decimali dell' unità, si sono chiamate decimali.

70. Per leggere una frazione decimale scritta in cifre, in linguaggio ordinario, ci serviamo del metodo che è stato impiegato per leggere un numero intero; cioè si divide il numero decimale in gruppi di tre cifre ciascuno, a cominciare dalla virgola. Si enunciano quindi le unità intere, e il numero di ciascun gruppo di decimali come se esso fosse solo, e come se si trattasse di un numero intero, dando subito dopo, il nome di *millesimo* al primo gruppo di tre cifre, *millionesimo* al secondo gruppo, *billionesimo* al terzo gruppo, e così in seguito.

Allorquando vi è più di un gruppo e che l' ultimo a destra è incompleto, se vi sono due cifre si suppone terminato da uno zero, e se ve ne è una sola da due.

È certo infatti che ciò può farsi impunemente, poichè l' aggiunta di uno zero o due zeri alla destra di una frazione decimale non ne altera il valore, poichè si abbia per esempio la frazione 0,7 questa messa sotto la forma di frazione ordinaria è $\frac{7}{10}$, ma $\frac{7}{10}=\frac{70}{100}=\frac{700}{1000}$ ec. . . dunque $0,7=0,70=0,700=$ ec.

Esempii. Leggere il numero 37,622813. Questo esprime 37 interi 622 millesimi, 813 millionesimi. Leggere il numero 7,0406, esso si enuncia 7 interi, 40 millesimi, e

600 millionesimi. Farò osservare che avrei potuto leggere quest'ultimo anche come segue, 7 interi 406 dieci millesimi. Leggere il numero 0,003, esso equivale a 3 millesimi.

71. Si scrive un numero decimale dettato, cominciando da scrivere in cifre la collezione dell'unità intere, facendole seguire da una virgola, quindi ciascun gruppo di decimali, come se esso fosse solo, osservando di sostituire con zeri i decimali che non sono enunciati.

Esempii. Scrivere in cifre il numero diciotto interi e trentasei millesimi. Osservo che le centinaia del gruppo dei millesimi mancano, vale a dire che mancano i decimi, cioè la prima cifra dopo la virgola; comincio perciò da scrivere 18 interi, poi una virgola, quindi uno zero, e finalmente 36 ed ho 18,036. Il numero cinque unità, e quarantadue millionesimi si scrive 5,000042. Finalmente diciassette millesimi si scrivono 0,017.

72. Dalle nozioni stabilite sopra i decimali ne resultano le seguenti proprietà particolari alle frazioni.

1.ª Dall'aver visto (n.° 69) che non si altera il valore di una frazione decimale con l'aggiunto di uno o più zeri alla sua destra, se ne deduce che delle frazioni che abbiano un diverso numero di cifre, e quindi un diverso denominatore sottinteso, si riducono con la massima facilità, ad uno stesso denominatore. Infatti siano date le frazioni decimali 0,3, 0,77, 0,7035 e 0,650000. Osservo che la frazione che abbia più cifre significative dopo la virgola, è 0,7035; questa avendone quattro, aggiungo o sopprimo alla destra delle altre tanti zeri in modo che tutte abbiano quattro cifre dopo la virgola, ed ottengo così

0,3000, 0,7700, 0,7035, 0,6500.

Frazioni che avendo un ugual numero di cifre dopo la virgola, hanno un medesimo denominatore, e che, da quanto abbiamo detto, hanno ancora il medesimo valore delle frazioni date.

2.ª Dati due o più rotti decimali, che abbiano un diverso numero di cifre, quello avrà un maggior valore che avrà prima degli altri di seguito alla virgola una maggior cifra significativa; infatti riducendoli tutti al medesimo denominatore col metodo esposto, è visibile che avrà un maggior valore quello che avrà la maggior cifra significativa dopo la virgola.

Siano le frazioni 0,35, 0,750007, 0,8 ridotte al medesimo denominatore: queste danno

0,350000, 0,750007, 0,800000.

Ora, dalla sola ispezione delle medesime, si riconosce che la terza frazione è quella che ha un maggior valore delle altre.

3.ª Avanzando la virgola di uno o più posti verso la destra in un numero, questo acquista un valore 10, 100, 1000, ec. volte maggiore ed è come se si moltiplicasse per 10, 100, 1000, ec.; Per esempio, se al numero 3164, 75689 avanzo la virgola di uno, due, tre, quattro posti verso la destra, ottengo 31647, 5689; 316475, 689; 3,164756, 89 e 31647568, 9, numeri che sono 10, 100, 1000, 10000 volte più grandi del numero dato 3164,75689; infatti, coll' avanzare la virgola di ciascun posto, ciascuna cifra acquista un valore dieci volte maggiore.

L' inverso ha luogo portando la virgola verso la sinistra, così i numeri 316, 475689, 31, 6475689, 3, 16475689 hanno un valore 10, 100, 1000 volte minore del numero dato 3164,75689; vale a dire che si sono divisi per 10, 100, 1000; infatti ad ogni retrocedimento della virgola ciascuna cifra acquista un valore dieci volte più piccolo. Risulta evidentemente da ciò il mezzo per dividere un numero decimale per un numero intero composto dell' unità seguita da uno o più zeri, separando cioè da esso tante cifre a destra quanti zeri sono alla destra dell' unità; così, 75647, 3 diviso per 1000 è eguale 75, 6473; diviso per 100000 è eguale a 0, 756473.

4.ª Se in un rotto decimale si sopprimono le ultime cifre, l' errore che si commette sarà tanto più piccolo quante più sono le cifre che rimangono. Così dato il rotto 0, 3167342, se trascuro l' ultime due cifre 42, commetto un errore di 42 dieci millionesimi: invece se trascuro la sola cifra 2 non commetto l' errore che di due dieci millionesimi.

73. Cerchiamo ora di convertire un rotto ordinario in frazione decimale.

Sia proposta la frazione $\frac{17}{43}$.

Il numero proposto essendo riportato all' unità principale esprime i $\frac{17}{43}$ di questa unità; ma siccome un' unità vale dieci decimi, così 17 unità varranno 170 decimi, ossia $\frac{17}{43}$ sono equivalenti a $\frac{170}{43}$ di decimo.

Così allorquando abbiamo disposto i due numeri 17 e 43, come nella divisione ordinaria, porremo uno zero al quoziente e quindi una virgola; in seguito si divide il 170 per 43 e si ottiene un quoziente 3, che si scrive alla destra della virgola, e il quale rappresenta il numero dei *decimi* contenuti in $\frac{17}{43}$, vale a dire che $\frac{17}{43}$ è eguale a 3 *decimi* più $\frac{41}{43}$ di *decimo*. Similmente, siccome un decimo è eguale a 10 centesimi, ne segue che $\frac{41}{43}$ di *decimo* sono uguali a $\frac{410}{43}$ di *centesimo*; ed effettuando questa nuova divisione, a 9 *centesimi* più $\frac{23}{43}$ di *centesimo*. Scrivendo un nuovo zero alla destra di 23,

e dividendo 230 per 43 si trova per quoziente 5 *millesimi* e per resto 15, alla destra del quale si pone un nuovo zero per farne dei *diecimillesimi*, e così di seguito, spingendo l' operazione tanto avanti quanto è necessario per ottenere un dato numero di cifre decimali; negli usi ordinari della società sono bastanti cinque decimali e in alcuni casi anche 4 e 3, specialmente quando il numero decimale non deve moltiplicarsi per numeri molto grandi. Ecco come nella pratica si dispone ed eseguisce quest' operazione protratta fino a 7 decimali.

```
170 { 43
 410 { 0,3953488
  230
   150
    210
     380
      360
       16.
```

Da ciò la regola per convertire una frazione ordinaria in frazione decimale. *Si dispongono i due numeri come nella divisione ordinaria, si scrive* 0 *al quoziente e alla destra di questo* 0 *si pone una virgola.* Ciò premesso, *si mette alla destra del numeratore uno* 0 *e si divide il numero resultante pel denominatore; il quoziente che si ottiene esprime i decimi. Si pone uno* 0 *alla destra del resto, e si divide il numero resultante pel denominatore; si ottiene un quoziente che esprime i centesimi, e un nuovo resto, si divide questo resto aggiuntovi uno zero; si ottiene un quoziente che esprime i millesimi, e un terzo resto sopra del quale si opera nello stesso modo.* Finalmente si continua questa serie di operazioni fintantochè si siano ottenute tante cifre decimali quante ne esige la questione.

Se il numeratore della frazione è maggiore del deno-

minatore, si comincia da estrarne gli interi, scrivendoli al quoziente invece dello 0 che doveva tenerne il posto.

Premesso tutto ciò, passiamo adesso ad eseguire le quattro operazioni fondamentali sopra le frazioni decimali; cioè

Addizione, Sottrazione, Moltiplicazione e Divisione delle Frazioni Decimali

74. Siccome le unità intere e le unità decimali formano una stessa serie di unità, ciascuna delle quali vale sempre dieci unità dell'ordine immediatamente inferiore, così si farà l'addizione dei numeri decimali col metodo stesso usato nei numeri interi: cioè

Si scriveranno i numeri interi e decimali gli uni sotto degli altri in modo, che l'unità di uno stesso ordine si trovino tutte in una stessa colonna; quindi si sommeranno parzialmente e successivamente tutte le unità per ordine, cominciando da quelle di minor valore, e facendo queste parziali addizioni, come se si dovessero sommare numeri interi (n.° 10). Avuta la somma, si dovrà avvertire di separare in essa con la virgola le cifre che numerano unità decimali, dalle cifre che numerano unità intere, avvertendo che se i numeri dati non comprendessero gli stessi ordini decimali, si potrà ad essi supplire, quando si voglia con degli zeri alla destra di questi numeri.

Esempii

38,0100	0,475	6,320005
2,0750	0,075	0,7
304,8325	0,25	0,00005
0,7000	0,95	2,75
345,6175	1,750	9,770055

75. La sottrazione si opera ugualmente come sopra i numeri interi; basta completare con zeri il numero delle cifre decimali nelle due quantità proposte, e nel rimanente procedere come se non ci fosse virgola. Si pone quindi la virgola del risultamento nella colonna dell'altre virgole. Si abbia, per esempio, da sottrarre 7,98765 da 27,75. Dopo avere scritto tre zeri in seguito di 27,75, il che non cangia il valore di questo numero (n.° 69), si eseguisce la sottrazione secondo il metodo consueto.

$$\begin{array}{rl} 27,75000 & \\ 7,98765 & \\ \hline 19,76235 & \textit{differenza} \end{array}$$

quindi si pone la virgola dopo il 19, cioè nel posto dell'altre virgole.

Per sottrarre 0,75 da 2,06875, si scriverebbe ugualmente

$$\begin{array}{lr} & 2,06875 \\ & 0,75000 \\ \hline \textit{differenza} & 1,31875 \end{array}$$

76. La moltiplicazione si opera sopra le frazioni decimali come se essi fossero numeri interi, cioè senza fare veruna attenzione alla virgola. Allorquando si è trovata la somma totale, si separano mediante una virgola tante cifre decimali alla destra di questa somma, quanti decimali vi sono nel moltiplicando e nel moltiplicatore.

Per esempio, se si volesse moltiplicare, 5,075 per 4,75 si moltiplicherà al solito come se si trattasse di moltiplicare 5075 per 475. Si troverà in questo modo

$$\begin{array}{r} 5,075 \\ 4,75 \\ \hline 25375 \\ 35525 \\ 20300 \\ \hline 24,10625 \end{array}$$

Eseguita l' addizione finale, si separeranno, mediante una virgola, *cinque* cifre alla destra, perchè vi sono *tre* decimali nel moltiplicando e *due* nel moltiplicatore.

La ragione di ciò è evidente, poichè considerando 5,075 come il numero 5075, si rende questo numero *mille* volte troppo grande, come si rende *cento* volte troppo grande il moltiplicatore 4,75 considerandolo come il numero intero 475. Il prodotto intero 2410625 è dunque da una parte mille volte più grande di quello che si domanda, e dall' altra cento volte troppo grande; egli è dunque in tutto *centomila* volte troppo grande; ma ponendo la virgola dopo la quinta cifra si cangiano le centinaia di migliaia in semplici unità, e si rende *centomila* volte più piccolo, ed è allora che esso rappresenta il vero valore del prodotto di 5,075 per 4,75.

77. Nella pratica spesso succede che il prodotto ha meno cifre, che non si hanno decimali da separare. Vi si supplisce allora scrivendo alla sinistra del prodotto tanti zeri, purchè vi sia nel prodotto tante cifre quante ve ne sono nel moltiplicando e nel moltiplicatore, avvertendo di porre in questo caso uno zero invece delle unità, ed una virgola dopo per separare i decimali. Per esempio, il prodotto di 0,3 per 0,04, che è 12, quando si considerano 3 e 4 come numeri interi; e il prodotto dovendo contenere in questo caso tre decimali, si farà precedere da due zeri e si situerà la virgola dopo il primo. Avremo in questa guisa

$$0,3 \times 0,04 = 0,012.$$

Se osserviamo che 0,3 e 0,04 espressi in frazioni ordinarie sono $\frac{3}{10}$ e $\frac{4}{100}$ il cui prodotto è (n.° 65), $\frac{3 \times 4}{10 \times 100} = \frac{12}{1000}$ e che 12 *millesimi* si scrivono 0,012, saremo certi di quanto abbiamo operato sopra, e come dobbiamo contenerci in casi simili.

Ecco altri esempii di moltiplicazione.

45,8	3,54287	245,305
14	0,0052	0,100007
1832	708574	1717135
458	1771435	245305
641,2	0,018422924	24,532217135

78. Esaminiamo ora i diversi casi della divisione dei numeri decimali. Cominciamo dal caso in cui si abbia da dividere un numero decimale per un altro, e che questi numeri contengano la stessa quantità di cifre decimali, si potrà eseguire la divisione considerando tanto il divisore quanto il dividendo come numeri interi, mentre con ciò non avremo che resi ambedue questi fattori, 10, 100, 1000, ec. volte più grandi, secondo che conterranno una, due, tre, ec. cifre decimali, vale a dire che il quoziente dovrà rimanere lo stesso, anche dopo cancellata la virgola nel dividendo e nel divisore. Abbiasi per esempio da dividere la quantità decimale 0,528 per 0,132.

528	132
0	4

Tralascio la virgola tanto nell' uno che nell' altro numero; e siccome avevo tre cifre decimali nel dividendo e tre nel divisore, questi numeri diventeranno con ciò 1000 volte più grandi ambedue, il che non può alterare il quoziente, ed ottengo mediante ciò 4 in quoziente: avrei ugualmente avuto 4, se avessi diviso 528 *millesimi* per 132 *millesimi*. Infatti messi questi numeri sotto la forma di frazioni ordinarie, si avrebbe

$$\frac{528}{1000}:\frac{132}{1000}=(\text{n.}^\circ\ 66)\ \frac{528\times1000}{1000\times132}=\frac{528}{132};$$

vale a dire che si ricade nel caso come sopra di dover dividere 528 interi per 132 interi.

79. Nel caso in cui il dividendo o il divisore non avessero decimali, si opererebbe similmente, scrivendo però prima di seguito al numero che mancano i decimali tanti 0, quanti sono i decimali nell' altro. Si abbia da dividere 35,17 per 18.

Se tralascio la virgola nel dividendo 35,17 lo rende 100 volte più grande; è quindi necessario rendere anche il divisore 18 cento volte più grande, ciò che si fa scrivendo alla sua destra due zeri (n.° 4). Avrò perciò da dividere 3517 per 1800, il che non offre difficoltà.

Si debba ancora dividere 36,18, per 18,5: cancello la virgola nel dividendo, e siccome vi sono due decimali, così lo rende 100 volte più grande: osservo quindi che cancellando la virgola nel divisore, siccome esso non contiene che un decimale, non lo rende che dieci volte più grande; ed essendo indispensabile di rendere anche il divisore 100 volte più grande, così è evidente che prima di cancellare la virgola nel divisore si aggiungerà uno zero, per fare in modo che tanto il dividendo quanto il divisore abbiano uno stesso numero di cifre decimali, e quindi si sopprimerà la virgola. Infatti dividere 36,18 per 18,50 equivale a dividere 3618 per 1850 mediante quello che abbiamo detto sopra.

80. Si abbia ora da dividere 365,731 per 0,75.

Comincio dallo scrivere in seguito del divisore 0,75 uno zero, il che mi dà 0,750; quindi cancello la virgola tanto dal dividendo quanto dal divisore ed ottengo i numeri 365731 e 750, con i quali eseguisco la divisione come segue

365731	750
6573	487
5731	
481	

ed ottengo per quoziente 487 interi, più un resto 481; vale a dire che il quoziente completo è $487 + \frac{481}{750}$. Ora

tolto sarebbe tutto il vantaggio dei decimali, se si dovessero adoprare in alcuni casi le frazioni comuni: dunque gioverà mediante la regola che abbiamo stabilita (n.° 73), valutare in decimali la frazione $\frac{481}{750}$: questo è il motivo per cui riprendo nuovamente a considerare completamente la divisione dei numeri 365731 e 750.

```
365731 { 750
 6573  { 487,64133
  5731
   4810
    3100
     1000
      2500
       2500
        250
```

Divido 365731 per 750 e trovo 487 per quoziente e 481 di resto: invece di dire come sopra che il quoziente completo è $487 + \frac{481}{750}$, decompongo quest' ultima frazione in decimali, mediante il metodo detto di sopra ed esposto (n.° 73), ed ottengo per quoziente approssimato 487, 64133.

Siccome avrei potuto aggiungere uno zero al nuovo resto 250 e proseguire la divisione, così col mezzo dei decimali possiamo ottenere di approssimarsi quanto si vuole al quoziente esatto, ogni qualvolta la divisione lasci qualche avanzo, e la regola da seguirsi in simil caso è di scrivere tosto alla destra del primo avanzo tanti zeri quante cifre decimali si vogliono avere nel quoziente, giacchè moltiplicando questo avanzo per 10, 100, 1000, ec. è lo stesso che convertirlo in *decimi*, *centesimi*, *millesimi*, ec.; per cui nel quoziente si debbono necessariamente trovare *decimi*, *centesimi*, ec.

81. Si abbia ancora da dividere 0,075 per 6,41.

Sembra a prima vista, che operando secondo quanto abbiamo fatto fino a questo punto, la divisione non possa eseguirsi, poichè dovremmo aggiungere uno zero al divisore, il che darebbe 6,410, e quindi vedere quante volte entra nel dividendo 0,075, ed è evidente che fatta questa operazione il divisore non entra nel dividendo; pure vedremo che la regola è la medesima e che salvo una leggera modificazione, saremo in grado di ottenere il quoziente cercato. Infatti

$$0,075 = \frac{75}{1000}, \quad e \quad 6,41 = \frac{641}{100}$$

e considerando il dividendo e il divisore come frazioni ordinarie, abbiamo (n.° 66)

$$\frac{75}{1000} : \frac{641}{100} = \frac{75 \times 100}{1000 \times 641} = \frac{75}{6410}$$

dal qual resultato rilevasi che si tratta di dividere 75 interi per 6410 interi, ossia di ridurre in frazione decimale la frazione ordinaria $\frac{75}{6410}$, il che si eseguisce col metodo stabilito (n.° 73) e come si vede qui sotto

$$\begin{array}{r|l} 0,07500 & 6410 \\ 10900 & \overline{0,0117} \\ 44900 & \\ 030 & \end{array}$$

Da quanto abbiamo veduto fin qui è evidente, che potremo stabilire la seguente regola generale per la pratica della divisione.

Per dividere un numero decimale per un altro numero decimale, si rende prima con zeri uguale il numero delle cifre decimali nel dividendo e nel divisore, quindi si cancella la virgola e si opera come nella divisione dei numeri interi.

Nell' operazioni delle frazioni decimali, hanno luogo le medesime riprove che sono state esposte per i numeri interi ai (n.i 41, 42 e 43).

82. Daremo termine a questa teoria con le seguenti utili applicazioni.

Leggere, e scrivere in lettere i seguenti numeri decimali.

0,4 — 0,04 — 0,004 — 0,0004 — 0,26 — 0,54 — 0,87 — 0,3157 — 0,0032 — 0,0053 — 0,0816 — 0,0796036 — 0,0390463 — 0,00000073 — 38,356 — 200,0734 — 390,001708 — 763,40969.

Scrivere in cifre i numeri decimali seguenti.

Cinque decimi — quarantatre centesimi — novecentoquarantadue millesimi — cinquecentocinquantasette diecimillesimi — tremila quattrocento cinquanta due diecimillesimi — quarantadue mila settecentododici cento millesimi — quattro mila duecentoventisei millionesimi — Quattro unità e sette decimi — trentasei unità e sessantasei centesimi — centocinquanta unità e quarantasei millesimi — cinquecento sessanta cinque unità e cinquemila quattrocento sessantasette diecimillesimi.

Ridurre in frazioni decimali le seguenti frazioni ordinarie

$$\frac{3}{7},\ \frac{5}{17},\ \frac{7}{19},\ \frac{5}{8},\ \frac{7}{12},\ \frac{5}{23},\ \frac{7}{37}.$$

Addizione dei Decimali

0,47	63,071	4,001	0,00068	9,070
2,14	9,042	3,625	0,00115	9,817
3,63	130,0671	0,789	0,00347	9,313
0,06	3,025	0,555	0,00419	9,107
0,09	7,14	0,639	0,00084	9,341
0,10	85,26	2,41	0,00112	8,417
9,15	3,4	5,33	0,00007	9,096

Problema 1.° Prendendo il peso della terra per unità, si sa che Mercurio pesa 0,1752, Venere 0,8745, Marte 0,1394, Giove 331,561, Saturno 101,0631, Urano 19,8089. Vi sono inoltre quattro piccoli pianeti e quattordici lune, che tutti insieme pesano al più quanto la terra. In questo caso qual'è il peso di tutti i pianeti? — Ris. 455,6221.

Problema 2.° Un numero è tale che dopo averne sottratto 5,356, resta 35,644. Qual'è questo numero? — Ris. 41.

Sottrazione dei decimali

45,36	5,037	7,324	0,30401	0,09305
24,12	1,032	7,234	0,19312	0,00082422

Problema 1.° Si è fatta avanzare una lancetta di tre giri e 86 centesimi, quindi si è fatta retrocedere di due giri e 17 centesimi. Di quanto effettivamente si è fatta avanzare? — Ris. Di un giro e 69 centesimi.

Problema 2.° Qual somma bisogna aggiungere a 5,458 per avere 6 nel totale? — Ris. 0,542.

Moltiplicazione dei decimali

$8,24\times2$ — $1236\times0,4$ — $3,5\times2,4$ — $0,532\times2,08$ —

$0,00416\times0,00138$ — $2,5\times7,4$ — $8,45\times2,16\times0,61$ —

$9,34\times1,16\times0,6\times0,01$ — $0,08073\times0,00062$.

Problema 1.° Il quoziente di una divisione è 1,083, il divisore è 28,604, e il resto 0,001788. Qual'è il dividendo? — Ris. 30,979920.

Problema 2.° Qual somma si otterrebbe, se, dopo aver moltiplicato 250,540 per 10, si ripetesse questo prodotto 2,458 volte? — Ris. 6158,27320.

Divisione dei decimali

0,46 : 2 — 0,624 : 13 — 53,46 : 3 — 0,3 : 0,2 — 240 : 3,05 — 2 : 4,765 — 0,307 : 2,4 — 1,1 : 0,0036 — 4,817 : 25,9 — 0,0005 : 0,00001.

Problema 1.° Tutti i pianeti insieme pesanò 455,62 volte più della terra, presa per unità di peso, e il sole 354936. Quante volte dunque il sole pesa più di tutti i pianeti? — Ris. Trascurando i decimali si trova che il sole pesa più della terra 779 volte.

Problema 2.° Qual' è il numero che, essendo moltiplicato per 55, dia 156,970 nel prodotto? — Ris. 2,854.

Fine della Prima Parte

TRATTATO
DI ARITMETICA

PARTE SECONDA

CAPITOLO PRIMO

DELLE MONETE, PESI E MISURE IN USO IN TOSCANA E IN ALCUNE PIAZZE ESTERE

83. Fino a questo momento nel considerare le frazioni, abbiamo fatta astrazione dalla natura dell' unità a cui si concepivano riferite; per applicare però i numeri agli usi della società, non vi è questione nella quale non sia necessario di determinare la natura dell' unità principale di cui si tratta nella questione proposta. Ora, siccome l' uso frequente delle frazioni negli usi sociali ha fatto dare dei nomi a quelle che s' incontrano più spesso, così ne sono derivate le divisioni stabilite nelle monete, nei pesi, e in generale nelle misure usuali di tutti i paesi.

Cominceremo da iniziare i giovanetti sulle diverse unità di misura che esistono presso noi, quindi ci limiteremo a far loro conoscere quelle delle seguenti piazze estere: cioè, Roma, Napoli, Milano, e Parigi.

Il tempo presso tutte le nazioni si valuta per *anni*, l' anno poi si distingue in *civile* o *solare*, e *mercantile;* tanto l' uno quanto l'altro si divide in 12 *mesi*, che nell'anno mercantile si compongono uniformemente di giorni 30 l' uno, nel mentre che nell' anno *civile* o *solare* i mesi di Gennaio, Marzo, Maggio, Luglio, Agosto, Ottobre e Dicembre contano giorni 31; Febbraio ne conta

28 negli anni comuni e 29 nei bisestili, e i rimanenti mesi, cioè Aprile, Giugno, Settembre e Novembre ne contano 30. Il giorno poi si divide in 24 ore, l' ora in 60 minuti primi, il minuto primo in 60 minuti secondi, e i secondi si suddividono in decimi e centesimi.

Stabilita la misura del tempo la quale è comune a tutte le nazioni, diamo attualmente le nozioni

Delle misure, pesi e monete in uso in Toscana.

84. L' unità di lunghezza è il braccio a panno, si divide in 20 *soldi*, il soldo in 12 *denari*. Cinque braccia formano ciò che si chiama una *canna*, adoprata dagli agrimensori per la misura dei terreni. L' unità per le misure itinerarie è il *miglio* che si compone di braccia

$$2833\frac{1}{3}.$$

L' unità di superficie è il *braccio quadro*, esso dividesi in 400 *soldi quadri*, ognuno di 144 *denari quadri*. L' unità per le misure agrarie è il *quadrato*, questo si divide in 10 *tavole*, la tavola in 10 *pertiche*, la pertica in 10 *deche*, e la deca in 10 *braccia quadre*; mediante ciò il quadrato contiene diecimila braccia quadre.

L' unità di misura pei solidi è il *braccio cubo*, che si divide in 8000 *soldi cubi*, ognuno dei quali si compone di 1728 *denari cubi*. Pel legname da ardere l'unità è la *catasta*, che in Firenze è composta di 24 braccia cube, e nel commercio di sole 18.

L' unità di capacità pei liquidi è il *barile*, che si divide in 20 *fiaschi* se si tratta di vino, e in soli 16 se di olio. Il barile da vino contiene libbre 133 e once 4 di umido, quello da olio ne contiene libbre 88. Il fiasco si divide in 2 *boccali*, il boccale in 2 *mezzette*, e la mezzetta in 2 *quartucci*. Due barili formano una *soma*.

L' unità di capacità per gli aridi è lo *staio*, che si divide in 2 *mine*, la mina in 2 *quarti*, il quarto in 8 *mezzette*, e la mezzetta in 2 *quartucci*. Tre staia formano un *sacco*, e 8 sacca formano un *moggio*.

L' unità di peso è la *libbra*: essa si divide in 12 *once*, l' oncia in 24 *denari*, e il denaro in 24 *grani*.

L' unità di moneta è la *lira*, che si divide in 20 *soldi*, di 12 *denari* ciascuno. Sette lire formano uno *scudo* moneta in oggi ideale; di più colla legge del 10 Luglio 1826 venne creata una nuova unità monetaria chiamata *fiorino*, esso si divide in cento parti dette *centesimi* o *quattrini*.

Ecco in ristretto il prospetto di tutte queste misure, pesi e monete.

giorno,	ore,	minuti,	secondi,
1 =	24 =	1440 =	86400
	1 =	60 =	3600
		1 =	60

canna,	braccia,	soldi,	denari.
1 =	5 =	100 =	1200
	1 =	20 =	240
		1 =	12

quadrato,	tavole,	pertiche,	deche,	braccia quadre.
1 =	10 =	100 =	1000 =	10000
	1 =	10 =	100 =	1000
		1 =	10 =	100
			1 =	10

braccio cubo,	soldi cubi,	denari cubi.
1 =	8000 =	13824000
	1 =	1728

scudo,	lire,	soldi,	denari.
1 =	7 =	140 =	1680
	1 =	20 =	240
		1 =	12

moggio,	sacca,	staia,	mine,	quarti,	mezzette,	quartucci.
1 =	8 =	24 =	48 =	96 =	768 =	1536
	1 =	3 =	6 =	12 =	96 =	192
		1 =	2 =	4 =	32 =	64
			1 =	2 =	16 =	32
				1 =	8 =	16
					1 =	2

libbra, once, denari, grani.

1 =	12 =	288 =	6912
	1 =	24 =	576
		1 =	24

braccio quadro, soldi quadri, denari quadri.

1 =	400 =	57600
	1 =	144

soma da vino, barili, fiaschi, boccali, mezzette, quartucci.

1 =	2 =	40 =	80 =	160 =	320
	1 =	20 =	40 =	80 =	160
		1 =	2 =	4 =	8
			1 =	2 =	4
				1 =	2

soma da olio, barili, fiaschi, boccali, mezzette, quartucci.

1 =	2 =	32 =	64 =	128 =	256
	1 =	16 =	32 =	64 =	128
		1 =	2 =	4 =	8
			1 =	2 =	4
				1 =	2

Una volta si faceva uso per l'unità di superficie dello *stioro*, che era diverso nella provincia fiorentina e pisana. Lo stioro fiorentino era composto di 12 ***panora***, il panoro di 12 ***pugnora***, e il pugnoro di 12 ***braccia quadre a terra***. Lo stioro pisano si componeva di 66 ***pertiche quadre***, ognuna delle quali conteneva 25 ***braccia quadre a panno***.

Finalmente pel legname da costruzione l' unità è il *traino*, che contiene 2 braccia cube, e che si divide in 12 ***bracciola***, ed ogni bracciuolo in 12 once. Laonde anche per queste unità di misura avremo

stioro, panora, pugnora, braccia quadre,

1 =	12 =	144 =	1728
	1 =	12 =	144
		1 =	12

traino, bracciuola, once.

1 =	12 =	144
	1 =	12

85. Fatte conoscere le monete, pesi e misure della Toscana, passiamo ora a far conoscere le principali unità di monete pesi e misure delle citate piazze (n.° 83).

Monete

Roma. Lo scudo di paoli dieci, si divide in baiocchi 100. Si avverte che le monete di Toscana nelle contrattazioni con le romane hanno un aumento del 5 per cento, e per conseguenza 95 lire toscane corrispondono a 15 scudi romani.

Napoli. Il ducato si divide in carlini 10, grani 100, cavalli o calli 1000. Il ducato è equivalente a Lire toscane cinque.

Milano. La lira austriaca, si divide in 100 centesimi, essa è equivalente a 87 centesimi di franco. La lira nuova d'Italia pari al franco; vi è anche l'antica lira austriaca; questa si divide in 20 soldi e il soldo in 12 denari e corrisponde a soldi toscani 18 e denari 4.

Parigi. Il franco, si divide in 100 parti uguali chiamate centesimi, e paragonato con la moneta Toscana corrisponde a Lire 1 soldi 3 e denari 10.

Pesi

Roma. La libbra di once 12 uguale alla libbra Toscana. Il cantaro piccolo di libbre 100 pari a libbre toscane 99 once 10 e denari 2.

NAPOLI. La Libbra di once 12

			o	d	g
	pari a toscane . . . . Lib.	0.	11.	8.	6
«	Il Cantaro di Lib. 150 . . «	141.	9.	17.	—
«	Il Cant. gr. di rotoli 100 . . «	262.	6.	—.	—
«	Il rotolo di Libbre 2				
	once 9 e $\frac{1}{3}$ . . . . «	2.	7.	12.	—

MILANO. La libbra sott. di once

			o	d	g
	12 pari a toscane . . Lib.	0.	11.	13.	8
«	La lib. grossa di once 28 . . «	2.	3.	—.	—

Inoltre vi è il quintale metrico il quale si divide in 100 libbre di 10 once per libbra, l' oncia in 10 grossi, il grosso in 10 denari, e il denaro in 10 grani.

PARIGI. Il chilogrammo il quale si divide in 1000 grammi; esso è equivalente a libbre toscane 2, once 11, denari otto, grani 4 e 83 centesimi.

Anticamente i Francesi avevano per unità di misura la libbra la quale si divideva in 2 marchi, il marco in 8 once, l' oncia in 8 grossi, il grosso in 3 scropoli e lo scropolo in 24 grani.

MISURE DA GRANO E BIADE

ROMA. Il rubbio di quarti 4 e staja 12, corrisponde a toscane sacca 3 staia due, quarti due e mezzette 1.

NAPOLI. Il tomolo — carro di misure 24 pari a staia 2 toscane e mezzette 4.

MILANO. Il moggio di staia 8, pari a sacca 2 toscane. Lo staio di quartari 4, equivalente a tre quarti di staio toscano.

Di più hanno la soma metrica, che si divide in 10 mine, la mina in 10 pinte, e la pinta in 10 coppi.

PARIGI. Il litro il quale si divide in 10 decilitri, e il decilitro in 10 centilitri, cento litri formano un ectolitro.

Misure da Vino e Olio

Roma. Barile di boccali 32, corrispondente a 1 barile toscano, fiaschi 5 e mezzette due.

Barile per olio di boccali 28, equivalente a 1 barile toscano, fiaschi 11 e 1 mezzetta.

Napoli. Barile di caraffe 60, pari a fiaschi 18 toscani, una mezzetta e 1 quartuccio.

Milano. Brenta di boccali 96, che corrisponde a toscani barili 1, fiaschi 13 e 1 mezzetta.

Parigi. La stessa misura usata per gli aridi, vale anche per i liquidi.

Misure Lineari Mercantili

Roma.	Palmo per le stoffe pari a Toscane	Braccia	0.	8.	7
«	Canna di palmi 8	«	3.	8.	2
«	Braccio per le tele	«	1.	1.	8
Napoli.	Palmo di parti 12 pari a toscane	Braccia	–.	8.	11
	Canna di palmi 8	«	3.	11.	8

Milano. Braccio di once 12 equivalente a braccia 1 e quattro denari toscani.

Di più i Milanesi hanno anche per unità di misura il metro, che si divide in 10 palmi il palmo in 10 diti, e il dito in 10 atomi.

Parigi. Metro, un'unità di dieci metri si chiama *decametro*. Un'unità di 100 metri chiamasi hectometro. Un' unità di 1000 metri si chiama kilometro; finalmente un' unità di 10000 metri si chiama miriametro. D' altra parte il metro si divide in dieci parti chiamate decimetri in cento parti chiamate centimetri, in mille parti chiamate millimetri, ec. ec.

Il metro corrisponde a braccia toscane 1 soldi 14 denari 3 e $\frac{222}{1000}$.

Di più i Francesi hanno anche per unità di misura la tesa, la quale si divide in 6 piedi, il piede in 12 pollici, e il pollice in 12 linee.

La tesa è equivalente a braccia toscane 3, soldi 8 e 6 denari circa.

Per completare l' esposizione dei pesi e misure delle piazze di Roma, Napoli, Milano e Parigi, mancherebbero le misure lineari agrarie, e quelle superficiali per i terreni, le quali si tralasciano, perchè le giudichiamo inutili per la classe a cui è affidata la lettura di questo trattato.

86. Per facilitare sempre più i conti che dovremo intraprendere, pongo in questo punto alcune tavolette sopra le frazioni di lira, e di braccio, e per quelle delle libbre, ec.

Tavola 1

Valore dei Soldi in porzione di Lira o di Braccio

per	1 soldo . . .	il ventesimo
	2	il decimo
	3	il decimo e metà di esso
	4	il quinto
	5	il quarto
	6	il quinto e metà di esso
	7	il quarto e il decimo
	8	il quinto due volte
	9	il quarto e il quinto
	10	la metà
	11	la metà e il ventesimo
	12	la metà e il decimo
	13	la metà, il decimo e metà di esso
	14	la metà e il quinto
	15	la metà e metà di essa
	16	la metà, metà di essa, e il quinto di questa

17 . . . . . la metà, il quarto e il decimo
18 . . . . . la metà e il quinto due volte
19 . . . . . la metà il quarto e il quinto

TAVOLA 2

Valore dei denari in porzione di soldo e dell' once in porzione di libbra

per 1 denaro o oncia . . il dodicesimo
2 . . . . il sesto
3 . . . . il quarto
4 . . . . il terzo
5 . . . . il terzo e il quarto di esso
6 . . . . la metà
7 . . . . la metà e il sesto di essa
8 . . . . la metà e il terzo di essa
9 . . . . la metà e il quarto
10 . . . . la metà e il terzo
11 . . . . la metà, il terzo e il dodicesimo

CAPITOLO SECONDO

ADDIZIONE E SOTTRAZIONE DEI NUMERI COMPLESSI

87. L'addizione dei numeri complessi si fa quasi nello stesso modo che quella dei numeri interi (n.º 10): si scrivono gli uni sotto degli altri, in modo che l'unità della medesima specie e della medesima suddivisione si trovino nella stessa colonna, si comincia da aggiungere le unità della più piccola suddivisione; se questa somma è minore di un' unità della suddivisione immediatamente superiore, si scrive al di sotto, in caso diverso cioè, che essa componga una o più unità della suddivisione immediatamente superiore, si segna al di sotto l' eccedente della somma sopra il numero dell' unità della spe-

cie superiore, che si sono potute levare, le quali si ritengono per unirle con le loro simili, sopra delle quali si opera ugualmente.

ESEMPIO

Si abbiano da sommare i numeri

Lire	437.	16.	8
	216.	8.	4
	169.	19.	8
	382.	13.	8
	421.	11.	4
Somma L.	1628.	9.	8
prova	223.	2.	0

Si comincia da sommare i denari e si ottiene per somma 32, la quale contiene 2 volte dodici denari o 2 soldi e 8 denari, si scrivono gli 8 denari al di sotto dei denari e si ritengono i 2 soldi per unirgli alla somma dei soldi. Si trova per la somma dei soldi, 67 alla quale uniti i 2 soldi che si sono portati dalla somma dei denari si ha 69; e siccome ogni 20 soldi si ha una lira, e che il 20 in 69 vi è contenuto 3 volte con un resto 9; così segno 9 al di sotto dei soldi, e ritengo le 3 lire per la colonna delle lire; nel rimanente delle colonne delle lire si opera esattamente come sopra i numeri interi. Con questo metodo si trova che la somma dei numeri dati è L. 1628. 9. 8.

La prova dell'addizione si fa nella stessa maniera che per i numeri interi (n.° 41).

Si pone due altri esempii uno di tese, ed uno di libbre, sopra dei quali si opera come sopra l'antecedente

	p p l	
Tese	432. 3. 7. 6	Libbre 328. 9. 11. 7
	312. 2. 9. 11	1613. 10. 20. 18
	621. 3. 10. 10	324. 8. 19. 16
	243. 4. 6. 8	3216. 6. 21. 10
T.	1610. 2. 10. 11	Libb. 5584. 0. 1. 3
	112. 2. 2. 0	1123. 3. 2. 0

88. Per eseguire la sottrazione si scriva il più piccolo numero complesso sotto al più grande, in modo che le unità della medesima specie si combinino, e si cominci la sottrazione dalla specie più piccola; se il numero inferiore di queste unità può sottrarsi dal numero superiore, si scrive il resto al di sotto, se non può sottrarsi, si prende in imprestito dalla suddivisione immediatamente superiore un' unità, che si aggiunge a quella della specie sopra la quale si opera, dopo averla ridotta in unità di questa specie; rammentandosi inseguito dell' unità che abbiamo preso in imprestito, onde diminuirla quando si passa a fare la sottrazione dell' unità di quella specie.

Esempio

Dal numero	Lire 407. 11. 4
Ci si propone di sottrarre	298. 16. 8
resto	L. 108. 14. 8
prova	L. 407. 11. 4

Siccome da 4 denari non se ne possono levare 8, così si staccherà un soldo dagli 11 soldi, il quale decomposto in denari, dà 12, unito ai 4 forma 16 denari, allora da 16 denari toltine 8 ne rimangono 8; passando ai soldi si dice da 10 soldi non se ne può togliere 16, ma prendendo una lira dalle L. 407, si dirà da 30 soldi levandone

16 il resto è 14, che si segna al di sotto dei 16 soldi; passerò quindi a fare la sottrazione delle lire 298 dalle residuate lire 406 come si fa negli interi; e così otterrò per resto L. 108. 14. 8.

La riprova si fa come nei numeri interi; cioè, si somma il numero più piccolo col resto, e se l'operazione è ben fatta si deve ottenere il numero più grande.

In tutti i casi simili si opererà come sopra; frattanto per esercizio si metteranno qui sotto due esempii di sottrazione, che uno di braccia, e l' altro di scudi.

Braccia	1607. 11. 4	Scudi	3428. 6. 10. 8
	796. 18 8		1797. 0. 19. 4
B.ª	810. 12 8	S.	1631. 5. 11. 4
	1607. 11. 4		3428. 6. 10. 8

CAPITOLO TERZO

Della Moltiplicazione dei Numeri Complessi

89. Nella moltiplicazione distingueremo due casi, 1.° quando il moltiplicando essendo complesso, il moltiplicatore è incomplesso; ovvero, 2.° quando il moltiplicando essendo complesso anche il moltiplicatore è complesso.

90. Cominciamo dal considerare il primo caso. *Si abbia da moltiplicare* Lire 253. 11. 8. per 8.

Si ottiene il prodotto domandato, *moltiplicando tutte le parti del moltiplicando, cominciando dalle più piccole, pel moltiplicatore, osservando di ritenere le unità degli ordini superiori, somministrate dai prodotti inferiori.*

Lire	253. 11. 8
	8
Lire	2028. 13. 4

Mediante la regola stabilita si dice: 8 volte 8 denari fanno 64 denari, i quali contengono 5 volte 12 denari, o 5 soldi e 4 denari; si pone dunque 4 denari e si ritiene 5 soldi per unirli al prodotto dei soldi.

Proseguendo si dice 8 volte 11 soldi fanno 88 e 5 di ritenuta fanno 93; e, siccome 20 soldi formano una lira, si dice 20 in 93 quante volte vi entra, si trova che vi sta 4 volte e avanza 13; così, si scrive 13 e si ritiene 4 lire per unirle al prodotto delle lire, sopra delle quali si opera col processo conosciuto nella moltiplicazione dei numeri interi, e si ottiene finalmente pel prodotto domandato Lire 2028. 13. 4.

Fintantochè il moltip licatore sarà composto di una sola cifra, potremo sempre eseguire la moltiplicazione come nell' esempio presente.

91. *Si abbia ora da moltiplicare* Lire 748. 14. 8 *per* 843.

	s d
	Lire 748. 14. 8
	843
	2244
	2992
s	5984
per 10. —	421. 10. —
3. 4	140. 10. —
1. —	42. 3. —
—. 4	14. 1. —
	Lire 631182. 4. —

Dopo eseguita la moltiplicazione di 748 per 843 come al solito, si passa alla moltiplicazione di soldi 14 e denari 8 per 843. Per ottenere questo prodotto in lire sul momento, si osserva che, se si dovesse moltiplicare 1 lira per 843, il prodotto sarebbe 843 lire. Ma 14 soldi e 8

denari sono equivalenti a soldi 10, più 3 soldi e 4 denari, più un soldo, più 4 denari; vale a dire (n.° 86) che essi sono la *metà*, più il *sesto*, più il *ventesimo*; più la terza parte del ventesimo. Così si dirà: per 10 soldi, la metà di 843 Lire è 421, e rimane 1 lira che vale 20 soldi; la metà di 20 soldi è 10; laonde si ottiene Lire 421. 10. — pel prodotto di 10 soldi per 843.

Prendendo il terzo di lire 421. 10. — si ha L. 140. 10. — pel prodotto di 3 soldi e denari 4 per 843.

Prendendo il ventesimo di 843, ovvero il decimo di 421. 10. —, si ottiene lire 42 e soldi 3 pel prodotto di un soldo per 843.

Finalmente, prendendo il terzo di Lire 42. 3. —, si ha Lire 14. e 8 soldi pel prodotto di 4 denari per 843.

Facendo la somma di tutti questi prodotti parziali, si ottiene pel prodotto totale Lire 631182. 4. —.

92. Consideriamo attualmente il caso in cui il *moltiplicando* e il *moltiplicatore* sono ambedue numeri complessi.

Il braccio di una data stoffa costando Lire 65. 17. 9, *si domanda il prezzo di braccia* 39 *e* $\frac{7}{8}$.

	Lire 65. 17. 9
	Braccia 39 $\frac{7}{8}$
	585
s	195
per 10. —	19. 10. —
5. —	9. 15. —
2. —	3. 18. —
—. 6	—. 19. 6
—. 3	—. 9. 9
$\frac{4}{8}$ . . .	32. 18. 10 $\frac{1}{2}$
$\frac{2}{8}$ . . .	16. 9. 5 $\frac{1}{4}$
$\frac{1}{8}$ . . .	8. 4. 8 $\frac{5}{8}$
	Lire 2627. 5. 3 $\frac{3}{8}$

Poichè un braccio costa Lire 65. 17. 9, è evidente che 39 braccia e $\frac{7}{8}$ debbono costare 39 volte L. 65. 17. 9, più i $\frac{7}{8}$ di questo medesimo numero; vale a dire che prima bisogna moltiplicare Lire 65. 17. 9 per 39, e quindi per $\frac{7}{8}$.

La prima moltiplicazione si eseguisce come al n.° 91 e si ottengono mediante quella regola i primi sette prodotti parziali.

Passiamo alla moltiplicazione per $\frac{7}{8}$. Ora questa frazione può decomporsi in $\frac{4}{8}$ ovvero $\frac{1}{2}$, più $\frac{2}{8}$; che è la *metà* di $\frac{4}{8}$, più $\frac{1}{8}$, che è la *metà* di $\frac{2}{8}$, dunque per ottenere il prodotto per $\frac{7}{8}$ basta cominciare dal prendere la metà di Lire 65. 17. 9, poi la metà di questa metà, e finalmente la metà della nuova metà.

Prendendo dunque la metà del moltiplicando si ottiene Lire 32 18. 10 $\frac{1}{2}$, che si scrive al di sotto dei prodotti precedenti. Prendiamo ora la metà di quest'ultimo prodotto ed avremo Lire 16. 9. 5 $\frac{1}{4}$. Finalmente prendendo la metà ancora di questo, si dice la metà di 16 è 8, la metà di 9 è 4, e resta 1 soldo, il quale vale 12 denari, 12 e 5 fanno 17, la cui metà è 8, e resta 1, il quale aggiunto a $\frac{1}{4}$, da $\frac{5}{4}$ la cui metà è $\frac{5}{8}$; così, quest'ultimo prodotto è uguale a Lire 8. 4. 8 $\frac{5}{8}$.

Ciò fatto si comincia da addizionare le frazioni (n.° 62) e si ottiene $\frac{11}{8}$, cioè $\frac{3}{8}$ e 1 denaro, si scrivono i $\frac{3}{8}$, e si ritiene il denaro per unirlo alla somma

dei denari, sopra la colonna dei quali si opera, come pure sopra le altre, come si è indicato precedentemente.

Si ottiene finalmente pel prodotto domandato, cioè per il prezzo di braccia 39 e $\frac{7}{8}$, Lire 2627. 5. 3 $\frac{3}{8}$.

93. Consideriamo finalmente il seguente esempio, il quale comprende tutte le difficoltà della moltiplicazione dei numeri complessi.

Si abbia *da determinare il prezzo di braccia* 85, *soldi* 19 *e denari* 4 *di un dato lavoro, supponendo che il braccio costi* Lire 26. 17. 4

	Lire 26. 17. 4
	Braccia 85. 19. 4
	130
	208
10ˢ. . . .	42. 10. —
5	21. 5. —
2	8. 10. —
4ᵈ. . . .	1. 8. 4
10ˢ. . . .	13. 8. 8
5	6. 14. 4
3 . 4ᵈ. .	4. 9. 6 $\frac{2}{3}$
1	1. 6. 10 $\frac{2}{5}$
	Lire 2309. 12. 9 $\frac{1}{15}$

Si eseguirà la moltiplicazione delle Lire 26. 17. 4 per 85 come nell'esempio antecedente, quindi si dirà se un braccio costa Lire 26. 17. 4 quanto costeranno soldi 19 e 4 denari; e siccome soldi 19 e 4 denari di braccio sono eguali

a soldi 10 più 5 soldi, più 3 soldi e 4 denari, più finalmente 1 soldo, e che (n.° 86) soldi $10 = \frac{1}{2}$, $5^s = \frac{1}{4}$, $3^s. 4^d = \frac{1}{6}$, e $1^s = \frac{1}{20}$ del braccio; così prenderemo la metà delle Lire 26. 17. 4 ed otterremo Lire 13. 8. 8, la quarta parte, cioè Lire 6. 14. 4, il sesto che è Lire 4. 9. 6 $\frac{2}{3}$ e finalmente un ventesimo che dà Lire 1. 6. 10 $\frac{2}{5}$, prodotti che segneremo al di sotto di quelli ottenuti per la somma delle Lire 26. 17. 4 per 85; e mediante ciò avremo ottenute tutte le parti della moltiplicazione delle Lire 26. 17. 4 per le braccia 85, 19 soldi e 4 denari. Fatta la somma di tutti i prodotti parziali, troveremo finalmente che il costo delle dette braccia 85, 19 soldi e 4 denari è di Lire 2309. 12. 9 $\frac{1}{15}$.

94. La prova della moltiplicazione si fa al solito per mezzo della divisione; ma a motivo delle frazioni complicate che molte volte contiene il prodotto, è in generale più semplice, di *raddoppiare il moltiplicando e di prendere la metà del moltiplicatore e viceversa.*

CAPITOLO QUARTO

Della Divisione dei Numeri Complessi

95. Prima di passare ad esaminare i casi della divisione dei numeri complessi, insegneremo il modo di convertire un numero complesso in un solo numero frazionario della sua unità principale.

Siano date Libbre 77 once 11, denari 19 e grani 21 da ridurre in un solo numero frazionario di libbra.

È evidente che se possiamo giungere a determinare il numero dei grani che il numero proposto comprende, basterà quindi dare al resultato ottenuto per denominatore 6912, poichè dalla tavola del (n.° 84) un grano vale $\frac{1}{6912}$ di libbra.

Conviene perciò ridurre il numero proposto in grani

```
             o  d  g
Libbre 77. 11. 19. 21
           12
          ----
          935
           24
         -----
         3740
        1870
           19
        ------
        22459
           24
       -------
        89836
       44918
           21
       -------
       539037
```

Prima di tutto siccome la libbra vale once 12, si ridurrà in once le libbre 77. 11 moltiplicando 77| per 12 e aggiungendo al prodotto le once 11; si ottiene così per resultato 935°.

Ora, siccome l' oncia vale 24 denari si ridurrà a de-

nari $935^o. 19^d$ moltiplicando 935 per 24 e aggiungendo 19 al prodotto; il che dà 22459^d.

Finalmente poichè un denaro vale 24 grani, basta per ridurre $22459^d. 21^g$ in grani di moltiplicare 22459 per 24 e di aggiungere 21 al prodotto, il che dà 539037 grani pel numero totale dei grani contenuti in Libbre $77. 11^o. 19^d. 21^g$.

Dando dunque al numero 539037 il denominatore 6912, si ottiene $\frac{539037}{6912}$ di libbra.

In qualunque altro caso simile e di specie qualunque, si opererà costantemente nella stessa maniera.

96. Premesso ciò, passiamo ad eseguire la divisione dei numeri complessi. Proponiamoci per esempio, di dividere Lire 17642. 16. 8 ugualmente in 24 persone. È evidente che in questo caso il quoziente dev' essere espresso in lire; cioè, dev' essere della stessa natura del dividendo. Ora, otterremo la soluzione della nostra questione con dividere le Lire 17642. 16. 8 pel numero astratto 24.

Ecco come nella pratica si eseguisce

Lire 17642. 16. 8	24
84	Lire 735. 2. 4 $\frac{1}{3}$
122	
2×20	
56	
8×12	
104	
8	

Eseguita la divisione delle Lire 17642 per 24 col metodo solito (n.° 34), si ottiene Lire 735 e 2 lire per resto, le quali moltiplicate per 20 e aggiuntovi i soldi 16 del dividendo, danno soldi 56, divisi per 24 ho il

quoziente 2 e soldi 8 per resto; questi moltiplicati per 12, onde ridurgli a danari ed aggiuntivi gli 8 denari del dividendo producono denari 104, i quali divisi per 24 danno 4 denari in quoziente e $\frac{8}{24}$ di denaro, ossia un terzo. Dunque la parte che toccherà a ciascuna persona è di Lire 735. 2. 4 $\frac{1}{3}$.

97. Nel caso in cui il divisore sia complesso, e che deva non ostante considerarsi come astratto, è necessario cominciare dal fare sparire le frazioni che l' accompagnano: per eseguire ciò più chiaramente, prendiamo un esempio, e supponiamo che si sappia che Libbre 23 e once 8 di mercanzia qualunque, sieno state pagate Lire 612. 10. 1 e che si domandi il prezzo di ciascuna libbra di mercanzia.

Cominceremo dall' osservare che libbre 23 e once 8 contenute nel divisore, sono equivalenti a libbre 23 e $\frac{2}{3}$, ossia (n.° 64) a $\frac{71}{3}$; così la questione si riduce a dividere Lire 612. 10. 1 per la frazione $\frac{71}{3}$; ma (n.° 66) si divide un intero per una frazione, moltiplicando l' intero pel denominatore della frazione, e dividendo quindi questo prodotto pel numeratore della frazione divisore; laonde cominceremo dal moltiplicare le Lire 612. 10. 1 per 3, e quindi divideremo il resultato per 71, ed otterremo per quoziente Lire 25. 17. 9.

Supponiamo ancora per un altro esempio, che si siano pagate Lire 1616. 12. 4 $\frac{1}{2}$ per Libbre 39. 1. 12. 16 di mercanzia, e che si cerchi il prezzo di una libbra.

Comincio dal ridurre le Libbre 39. 1. 12. 16 ad un solo numero frazionario, il che darà (n.° 95) $\frac{270448}{6912}$; premesso ciò, moltiplico le Lire 1616. 12. 4 $\frac{1}{2}$ per 6912, ed ottengo Lire 11174068. 16. —, le quali divise per 270448, mi fanno conoscere che una libbra di mercanzia costa Lire 41. 6. 4 $\frac{884}{16903}$.

98. Passiamo finalmente a considerare il caso in cui il dividendo e il divisore siano della medesima natura, come nella seguente questione.

Il prezzo di un braccio di panno scarlatto finissimo essendo di Lire 36. 15. —, si domanda quante braccia di questo panno si potranno comprare con Lire 2854. 8. — $\frac{3}{4}$?

È evidente che se ne potranno comprare tante braccia quante volte le Lire 36. 15. — entrano nelle Lire 2854. 8. — $\frac{3}{4}$, divideremo dunque questo numero per Lire 36. 15. —; e il resultato che si otterrà sarà il numero delle braccia che si potranno comprare con la data somma.

Per poter eseguire questa divisione riduco tanto il dividendo quanto il divisore, ciascuno ad un numero frazionario dell' ultima specie; fatto ciò pel dividendo ottengo (n.° 95) $\frac{2740227}{240 \times 4}$, e pel divisore $\frac{8820}{240}$; ora è evidente che si tratta di dividere una frazione per una frazione, e nel nostro caso si ottiene con la regola stabilita (n.° 66)

$$\frac{2740227}{240\times4}:\frac{8820}{240}=\frac{2740227\times240}{8820\times4\times240};$$

e siccome tanto nel numeratore, quanto nel denominatore esiste il fattor comune 240; così, (n.° 57) lo potrò sopprimere, e mediante ciò ottengo

$$\frac{2740227}{8820\times4}=\frac{2740227}{35280};$$

giunti a questo punto, ecco come si eseguisce la divisione

2740227 | 35280
270627 | B.ª 77. 13. 5

1.° resto 23667×20

473340 soldi di braccio
120540

2.° resto 14700×12

176400 denari di braccio
000000

Si divide il numeratore pel denominatore e si ottiene 77 più $\frac{23667}{35280}$, cioè le Lire 36. 15. — sono contenute in Lire 2854. 8. — $\frac{3}{4}$ volte 77 più $\frac{23667}{35280}$: ora, abbiamo veduto che per la somma proposta darebbero tante braccia di panno scarlatto quante volte il dividendo contiene il divisore; si avrebbero dunque mediante ciò braccia 77 e $\frac{23667}{35280}$ di braccio.

Per completare quest' operazione è necessario esprimere la frazione $\frac{23667}{35280}$ col mezzo delle suddivisioni delle

braccia; perciò il numeratore essendo considerato come braccia, si ridurrà in soldi moltiplicandolo per 20, e verrà $\frac{473340}{35280}$ di braccio; estraendo gli interi da questo numero frazionario, avremo per resultato 13 soldi, e per resto $\frac{14700}{35280}$ di denaro. Si ridurrà il numeratore di questo resto in denari, moltiplicandolo per 12, il che produrrà $\frac{176400}{35280}$: frazione equivalente a danari 5; talmentechè la risposta alla questione proposta sarà braccia 77 soldi 13 e denari 5.

Le riprove della divisione si possono fare per mezzo della moltiplicazione.

100. Termineremo questa seconda parte con proporre i seguenti problemi sopra i numeri complessi per esercizio dei giovani.

Somma e Sottrazione

Problema 1.° Un servitore ha speso Lire 48. 18. 9 per un vestito; Lire 12. 6. 6 per un paro di pantaloni; Lire 3. 5. — per una sottoveste; Lire 6 per un cappello e Lire 6. 10. — per un paro di scarpe. Quanto importa il suo vestiario? — Ris. Lire 77. —. 3.

Problema 2.° Un affittuario deve al suo proprietario Lire 2464. 15. 6, al fornaio Lire 346. 10. —, ad un negoziante di bestiame Lire 350. —. 4 e ai suoi domestici Lire 1096. 13. 8. Qual somma gli è necessaria per liberarsi dai suoi debiti? — Ris. Lire 4257. 19. 6.

Problema 3.° Un terreno è chiuso da quattro muri: il primo ha tese 8. 5^{p}. 6^{p} di lunghezza, il secondo ha tese 9. 3. 4, il terzo ha tese 5. 2. 3, e il quarto ha tese 6 0. 5. Si domanda la lunghezza del perimetro o contorno del terreno? — Ris. tese 29. 5. 6.

Problema 4.° Una corda, aveva subito dopo la fabbricazione, 13 tese, 5 piedi e 6 pollici di lunghezza. Dopo qualche tempo, la sua lunghezza si è trovata di 14 tese, 2 pollici; si domanda di quanto questa corda si è allungata? — Ris. Di pollici 8.

Problema 5.° Il 10 Gennaio a ore 8 e minuti 55 di mattina, un orologio segnava 9 ore e 37 minuti; esso ritarda ogni giorno sei minuti e 15 secondi; che ora indicherà il 12 Gennaio a ore 8 e minuti 55 di mattina? — Ris. Ore 9 minuti 24 e mezzo.

Problema 6.° Un cassiere di un banchiere aveva in cassa il lunedì mattina Lire 17628. 16. 8; nel corso della settimana ha fatto le seguenti riscossioni e pagamenti; cioè:

Riscossioni	*Pagamenti*
Lire 3612. 16. 8	Lire 896. 13. 8
« 310. —. —	« 1568. 18. 4
» 6799. —. —	« 739. 17. 4
« 1001. 11. 4	« 1. 13. 4
« 126. 13. 8	» 31. 18. 8
	» 33. —. —

Si domanda quanto gli rimarrà in cassa il sabato alla chiusura del banco? — Ris. Lire 26206. 17. —.

Problema 7.° Sono state comprate due selle, un cavallo nero e un cavallo bianco; la prima sella costa Lire 84 soldi 17 e denari 4; la seconda sella, Lire 36, soldi 19 e 8 denari; e il cavallo nero Lire 234. Quando si mette la prima sella sul cavallo nero, e la seconda sella sul cavallo bianco, il cavallo nero costa quanto il cavallo bianco. Si domanda il prezzo del cavallo bianco? — Ris. Lire 281 soldi 17 e denari 8.

Problema 8.° È stato fatto da una parte un fosso di tese 6, tre piedi, 4 pollici e 6 linee; da un'altra parte se ne è scavato uno di due tese, 4 piedi e 11 pollici; e

ci proponiamo di stabilirne un terzo che sarà di tese 7, piedi 5, pollici 11 e linee 7. Si domanda quante tese si dovranno pagare di questo lavoro, quando il terzo fosso sarà fatto? — Ris. Tese 17, piedi 2, pollici 3 e linea una.

Moltiplicazione dei Numeri complessi

Problema 1.° Un lavorante può fare braccia 4, soldi 13 e denari 4 di lavoro ogni giorno; si domanda quante braccia ne faranno 8 operai della medesima forza e volontà del primo? — Ris. Braccia 37, soldi 6 e denari 8.

Problema 2.° Un sacco di farina pesa libbre 169, once 6 e denari 14; si domanda quanto peseranno sacca 433 uguali al primo? — Ris. Libbre 63414. 6. 14.

Problema 3.° Si vuol sapere quanto costano tese 52 piedi 5, pollici 7 di lavoro a Lire 13 soldi 17 e denari otto la tesa? — Ris. Lire 734, soldi 17, denari 0 e $\frac{11}{18}$ di denaro.

Problema 4.° Determinare il prezzo di Libbre 35, marchi uno, once 5 e grossi 4, peso francese, di una data mercanzia, supponendo che la libbra costi Lire 23. soldi 17 e denari 3? — Ris. Lire 855, soldi 6, denari 5 e $\frac{5}{32}$ di denaro.

Problema 5.° Moltiplicare Lire 31, soldi 17 e denari 9 per Lire 15 soldi 11 e denari 5. — Ris. Lire 496, soldi 10, denari 3 e $\frac{47}{80}$ di denaro.

Problema 6.° La soma dell' olio costa Lire 71. 12. 4; si domanda quanto costeranno some 207, barili 1, fiaschi 12 e $\frac{1}{2}$? Ris. Lire 14888. 8. 8. $\frac{1}{16}$.

Problema 7.° Una sbarra di ferro si allunga di 1 pollice, 7 linee e 3 punti per tesa, quando la sua temperatura si eleva di un numero di gradi dato; di quanto si allungherà una sbarra di tese 2, piedi 4 e 7 pollici? — Ris. Di pollici 4, linee 5, punti 2 e $\frac{11}{24}$ di punto.

Problema 8.° Un operaio ogni ora fa tese 3, piedi 5 e pollici 7 di lavoro; si domanda quante ne farà in ore 35 e minuti 45? — Ris. Tese 140, piedi 3, pollici 1 e linee 3.

Divisione dei Numeri Complessi

Problema 1.° In mesi 431 un agente di un possidente ha speso Lire 23604. 8. 8; si domanda quanto ha speso un mese per l'altro? — Ris. Lire 54. 15. 4.

Problema 2.° In sacca 1320 grano sono state spese Lire 20746, si domanda quanto verrà a ragguagliare un sacco? — Ris. Lire 15. 14. 4.

Problema 3.° Braccia 317, soldi 6 e $\frac{1}{2}$ di panno costano Scudi 808. 2. 19. 3; si domanda quanto costerà un braccio? — Ris. Scudi 2. 3. 16. 8 il braccio.

Problema 4.° Dividere tese 1347 un piede e 7 pollici, per tese 9, piedi 5, pollici 7 e linee 10, il quoziente dovendo essere espresso in Lire, soldi e denari. — Ris. Lire 135. 10. 2 $\frac{466}{859}$.

Problema 5.° Un' opera di tese 78 piedi 3 e pollici 7 è stata fatta in mesi 2, giorni 24 e ore 6. Qual è stato il lavoro di un giorno, l' uno compensando l' altro, la giornata calcolandosi di ore 10? — Ris. Piedi 5, pollici 6, linee 10, punti 8 e $\frac{16}{47}$ di punto è il lavoro di un giorno.

Problema 6.° Un negoziante ha pagato Lire 23 e soldi 15 per il porto di libbre 538 e once 9 di mercanzia che gli sono costate Lire 1240 soldi 10 e denari 6. Si domanda quanto deve vendere una libbra di questa mercanzia per guadagnarvi soldi 5? — Ris. Lire 2, soldi 11, denari 11 e $\frac{439}{2155}$ di denaro; o piuttosto Lire 2 e soldi 12.

Problema 7.° Per 245 tese, 4 piedi e 10 pollici di lavoro sono state pagate Lire 431, soldi 3, denari 8 e $\frac{5}{36}$ di denaro; si domanda il prezzo della tesa? — Ris. Lire 1 soldi 15 e 1 denaro.

Problema 8.° In tre panieri vi erano 90 ova; se ne sono vendute per Lire 3 e soldi 13 dell' ova del primo paniere, per Lire 2, soldi 14 e denari 9 di quelle del secondo, per Lire 4, soldi 11 e denari 3 di quelle del terzo, e rimangono due ova in ciascun paniere; qual è stato il prezzo di ciascun ovo e quante ova vi erano in ciascun paniere? — Ris. Soldi 2, denari $7\frac{2}{7}$ per ogni ovo; quindi nel primo paniere vi erano ova 30 nel secondo 23 e nel terzo 37.

Sarà utilissimo che il maestro aumenti il numero di queste applicazioni il più che potrà.

Fine della Seconda Parte.

TRATTATO

DI ARITMETICA

PARTE TERZA

CAPITOLO PRIMO

Teoria dei Rapporti e delle Proporzioni

101. Le quantità si possono paragonare in due differenti maniere; cioè: o si cerca qual differenza passa fra due quantità date, ovvero si cerca il numero delle volte che una quantità è contenuta nell' altra. Così, nel caso che fossero dati i due numeri 18 e 6 potranno farsi le due seguenti domande: 1.ª *Qual è la differenza che passa fra questi due numeri?* e con facilità si risponderà che essa è 12; 2.ª *Quante volte il* 18 *contiene il* 6? e si dirà subito che il 6 è contenuto in 18 tre volte.

Il conoscere la differenza o il quoziente fra due numeri dati, significa conoscere *il rapporto* o *la ragione* che passa fra questi due numeri. Nel primo caso, dicesi *rapporto per differenza*, e nel secondo *rapporto per quoziente*; nel presente trattato ci occuperemo soltanto del secondo.

102. Il primo termine di un rapporto dicesi *antecedente*, il secondo *conseguente*.

Quando due rapporti per divisione sono uguali, la riunione dei quattro numeri che gli costituiscono si chiama *una proporzione*, (altre volte dicevasi *una proporzione geometrica*).

Si abbiano, per esempio, i quattro numeri 18, 6, 36, 12; il rapporto di 18 a 6, ovvero il quoziente di

18 per 6, essendo 3, egualmente che il rapporto di 36 a 12, questi quattro numeri formano una *proporzione*, la quale si scrive come segue:

$$18 : 6 :: 36 : 12,$$

ponendo *due* punti tra il primo e il secondo termine, *quattro* punti tra il secondo e il terzo, e *due* punti tra il terzo e il quarto.

La maniera poi di enunciare questa proporzione è la seguente: 18 *sta a* 6 *come* 36 *sta a* 12; il che non esprime altro che il 18 contiene il 6 tante volte quante il 36 contiene il 12. Mediante quest' osservazione si vede chiaramente che essa può scriversi ancora, così

$$\frac{18}{6} = \frac{36}{12}:$$

Il primo e terzo termine 18 e 36 si chiamano gli *antecedenti* della proporzione, il secondo e quarto 6 e 12 si dicono i conseguenti.

Il primo e l' ultimo termine 18 e 12 si chiamano ancora i *due estremi*; il secondo e il terzo 6 e 36 i *due medii*.

103. Quando quattro numeri sono in proporzione, il *rapporto comune* che esiste tra i due primi termini e tra i due ultimi, può essere, o un numero intero, o un numero frazionario, ovvero una frazione propriamente detta.

Si abbiano, per esempio, le proporzioni

$$18 : 6 :: 36 : 12,$$
$$12 : 9 :: 36 : 27,$$
$$5 : 12 :: 20 : 48.$$

Nella prima il rapporto comune è 3; nella seconda si ha $\frac{12}{9} = \frac{36}{27} = \frac{4}{3}$, cioè il rapporto comune è un numero essenzialmente frazionario.

Finalmente nella terza, si ha $\frac{5}{12}=\frac{20}{48}$, e sopprimendo il fattore comune 4 esistente nei due termini dell'ultimo rapporto si ottiene ugualmente $\frac{5}{12}$; laonde la frazione $\frac{5}{12}$ è il rapporto comune.

104. Quando si hanno quattro numeri in proporzione, la proprietà fondamentale si è, che il prodotto del primo pel quarto è uguale al prodotto del secondo pel terzo; ovvero che *il prodotto degli estremi è sempre uguale a quello dei medii.*

Infatti, qualunque proporzione formandosi di due rapporti per quoziente uguali tra loro, è evidente che essa si compone di due frazioni uguali tra loro (n.° 102). Ora, riprendiamo per esempio la proporzione del n.° 102 $18:6::36:12$, ovvero $\frac{18}{6}=\frac{36}{12}$ queste ridotte al medesimo denominatore, avranno per numeratori respettivi i due prodotti 18×12 e 36×6; e siccome i denominatori di ciascuna frazione sono uguali, così perchè possa sussistere l'uguaglianza $\frac{18}{6}=\frac{36}{12}$, bisognerà che anche i prodotti 18×12 e 36×6 siano pure uguali.

Ma il primo di questi prodotti esprime esattamente quello degli estremi, poichè resulta dalla moltiplicazione dell'antecedente del primo rapporto pel conseguente del secondo. Quanto al secondo di questi due prodotti uguali, esso esprime quello dei medj, poichè resulta dalla moltiplicazione del conseguente del primo rapporto per l'antecedente del secondo. Dunque, ec.

105. Da questa proprietà fondamentale resulta che, conoscendo *tre termini di una proporzione*, *si deve*, *per*

ottenere il quarto, se esso è un estremo, *dividere il prodotto dei medii per l' estremo conosciuto*, e, se esso è un medio, *dividere il prodotto degli estremi pel medio conosciuto.*

Così, si abbia la proporzione $18 : 6 :: 36 : x$, con x indicando il termine incognito, siccome si ha

$$18 \times x = 6 \times 36,$$

ne resulta

$$x = \frac{6 \times 36}{18} = 12;$$

il che dà

$$18 : 6 :: 36 : 12.$$

106. Può succedere che i due medii di una proporzione siano uguali tra loro, come nella seguente

$$9 : 12 :: 12 : 16;$$

la proporzione in questo caso si dice una *proporzione continua*, e si scrive come segue

$$\div 9 : 12 : 16.$$

Il termine di mezzo si chiama *medio proporzionale.*

107. Siano ora dati i quattro numeri 6, 4, 2, 12 in modo tale che si abbia $6 \times 4 = 2 \times 12$. Siccome in qualunque proporzione il prodotto dei medii è eguale a quello degli estremi, così è evidente che posso considerare uno di questi prodotti 6×4 come il prodotto degli estremi, e l' altro 12×2 come il prodotto dei medj, da ciò ne resulterà allora $6 : 12 :: 2 : 4$. *Dunque due prodotti uguali composti ciascuno di due numeri, danno sempre una proporzione.*

Si può cangiare di posto gli estremi di una proporzione senza distruggerla. Infatti nella proporzione $5 : 10 :: 15 : 30$, si può ugualmente dire, cangiando gli

estremi di posto, che 30 : 10 :: 15 : 5; poichè il prodotto degli estremi non essendo alterato, è ancora eguale a quello dei medj, e per conseguenza mediante il precedente principio vi è proporzione. Si può osservare che in questa seconda proporzione i rapporti sono cangiati; essi erano nella prima $\frac{1}{2}$, orà essi sono 3, poichè $\frac{30}{10}=3$ e $\frac{15}{5}=3$. L'eguaglianza dei due nuovi rapporti prova ancora in un' altra maniera, che vi è proporzione, non ostante il cambiamento di posto degli estremi.

Si può cangiare di posto i medj senza distruggere la proporzione. La proporzione 6 : 12 :: 2 : 4, si può ancora scrivere 6 : 2 :: 12 : 4; poichè non si altera il prodotto dei medj, e per conseguenza rimane ancora uguale a quello degli estremi. I rapporti sono cangiati; ma essi non hanno cessato di essere uguali tra loro.

Con ragionamenti simili, si vede chiaramente che si giungerebbe a provare, *che si possono cangiare di posto nel medesimo tempo gli estremi e i medj;* come pure *che si può mettere gli estremi nel posto dei medj senza distruggere la proporzione;* cioè da 6 : 12 :: 2 : 4 faro 4 : 2 :: 12 : 6, e da 6 : 12 :: 2 : 4 verrà ancora 12 : 6 :: 4 : 2.

Altri cambiamenti si possono fare sopra i quattro termini che costituiscono una proporzione; ma quelli di sopra accennati sono più che sufficienti per questo trattato.

CAPITOLO SECONDO

Della Regola del Tre

108. In aritmetica si dà il nome di *regola del tre* all' operazione per mezzo della quale, essendo dati tre termini di una proporzione con numeri conosciuti, si giunga a determinare il valore di un quarto termine incognito.

Essa è *semplice* o *composta*, *diretta* o *inversa*.

La regola del tre si dice *semplice*, se non sono dati che tre numeri; dicesi *composta*, quando l'enunciato della questione ne contiene più di tre; essa è *diretta*, quando il rapporto di due numeri dati della medesima specie, dev' essere uguale a quello di due altri numeri ancora della medesima specie che corrispondono ai primi; essa è *inversa*, quando questi due rapporti non possono essere uguali senza che uno sia rovesciato.

I seguenti esempii faranno meglio comprendere queste definizioni.

109. *Otto lavoranti hanno fatto braccia 20 di lavoro in un giorno; si domanda quante braccia del medesimo lavoro ne faranno 16 lavoranti nel medesimo tempo, lavorando nella stessa maniera.*

Questo quesito si vede subito che dipende dalle proporzioni; di più la regola del tre è semplice, poichè non si hanno che i tre numeri 8, 20 e 16. Essa è diretta, poichè il doppio di lavoranti farebbe il doppio di lavoro, e per conseguenza il rapporto del numero dei lavoranti uguaglia quello delle braccia corrispondenti, senza che vi sia bisogno di rovesciare quest' ultimo rapporto. Chiamando perciò x il numero delle braccia cercate si avrà la proporzione

$$8 : 16 :: 20 : x.$$

Da questa si avrà per quarto termine (n.° 105)

$$x = \frac{16 \times 20}{8} = \frac{320}{8} = 40 \text{ braccia.}$$

110. *Tre lavoranti hanno fatto un dato lavoro in 15 ore; quante ore saranno necessarie a 6 lavoranti, per fare il medesimo lavoro, lavorando ugualmente.*

Questa regola del tre è semplice, poichè non vi sono che tre numeri, e siccome il doppio di lavoranti deve impiegare solamente la metà del tempo per fare il medesimo lavoro, è necessario perchè il rapporto dei lavo-

ranti sia uguale a quello dell' ore, che quest'ultimo rapporto sia rovesciato. La regola è perciò semplice e inversa, e bisogna scrivere la proporzione come segue

$$3 : 6 :: x : 15,$$

vale a dire, che le 15 ore le quali corrispondono al numero dei lavoranti del primo termine 3 del primo rapporto, debbono formare il secondo termine del secondo rapporto: ovvero che invece di scrivere 15 : x, come si dovrebbe fare se la regola fosse diretta, si deve rovesciare questo rapporto e scrivere x : 15. Del rimanente il quarto termine si trova come precedentemente e si avrà

$$x = \frac{3\times15}{6} = 7^{o}\frac{3}{6} = 7^{o}\frac{1}{2}.$$

Da questi esempii si vede che qualunque questione che dà origine ad una proporzione, dà luogo sempre a quest' osservazione:

Il più gran termine della prima specie, sta al più piccolo termine della medesima specie; come il più gran termine della seconda specie, sta al più piccolo termine di questa specie, ovvero invertendo.

Il più piccolo termine della prima specie, sta al più grande della medesima specie; come il più piccolo termine della seconda specie, sta al più gran termine di questa specie.

Da quest' osservazione poi resulta che due rapporti saranno in un ordine diretto quando i due termini del primo si troveranno tra loro come i due termini del secondo.

Esempio. 8 : 4 :: 10 : 5, sono rapporti scritti in un ordine diretto, perchè il primo antecedente contiene il suo conseguente: come il secondo antecedente contiene ugualmente il suo conseguente.

Due rapporti finalmente saranno in un ordine inverso, quando i due termini dell' uno non saranno tra loro,

come i due termini dell' altro: tali sono i rapporti 8 : 4 e 5 : 10; poichè il primo antecedente contiene il suo conseguente, nel mentre che è il conseguente del secondo che contiene il suo antecedente. Ma siccome questi due quozienti sarebbero uguali se si rovesciasse l' ordine dei due termini di uno di questi rapporti, ne segue che perchè vi sia proporzione, si deva fare quest' inversione nel secondo di questi rapporti, se si lascia sussistere i due termini del primo rapporto nel loro ordine, e scrivere la proporzione 8 : 4 :: 10 : 5. Da ciò, la distinzione di *proporzioni dirette* e di *proporzioni inverse.*

111. *Due muratori lavorando 4 ore per giorno, hanno fatto in 3 giorni 40 braccia di muro; quante braccia ne farebbero del medesimo lavoro 5 muratori, lavorando 3 ore per giorno nella medesima maniera in 6 giorni.*

Questa regola si dice composta, poichè vi sono più di tre numeri conosciuti. Si comincia da riportarle ad una regola semplice; quindi con facilità si riconosce se essa è diretta o inversa.

Per ridurla ad una regola semplice, bisogna cominciare dal ridurre le ore, quindi i giorni all' unità, e aumentare in conseguenza il numero dei muratori. Per eseguir questo si dice.

2 muratori a 4 ore per giorno = 8 muratori a 1 ora per giorno.

8 muratori per 3 giorni = 24 muratori per un giorno.

Così 2 muratori a 4 ore per giorno, in 3 giorni = 24 muratori a 1 ora in un giorno.

Inseguito si dice,

5 muratori a 3 ore per giorno = 15 muratori in un' ora.

15 muratori in 6 giorni = 15×6 ovvero 90 muratori in un giorno.

Così: 5 muratori a 3 ore per giorno, per 6 giorni = 90 muratori per un' ora in un sol giorno.

Il problema proposto equivale dunque al seguente: 24 muratori hanno fatto, in un dato tempo, 40 braccia di muro, quante braccia del medesimo lavoro ne faranno

nel medesimo tempo 90 muratori lavorando nella medesima maniera. È evidente allora che la regola è diretta, poichè 2 volte 24 muratori farebbero evidentemente 2 volte 40 braccia di muro. Si deve dunque scrivere la proporzione come segue

$$24 : 90 :: 40 : x ;$$

essa dà

$$x = \frac{40 \times 90}{24} = 150 \text{ braccia}$$

112. *Tre operanti lavorando 6 ore per giorno e per 4 giorni hanno fatto una data opera; quanti giorni impiegheranno 8 operanti per fare la medesima opera, lavorando 4 ore per giorno, e nella medesima maniera.*

Questa regola è composta poichè l' enunciato della questione presenta più di tre termini. Per vedere se essa è diretta o inversa e per preparare la proporzione, bisogna dire:

3 operanti in 6 ore = 18 operanti in un' ora.

8 operanti in 4 ore = 32 operanti in un' ora.

Il problema proposto equivale dunque al seguente: 18 operanti hanno messo 4 giorni a fare un'opera; quanti giorni metteranno 32 operanti, per fare la medesima opera, lavorando nella medesima maniera.

La regola è inversa; poichè raddoppiando il numero degli operanti non sono necessari che la metà dei giorni. Si deve dunque scrivere $18 : 32 :: x : 4$, e cercare il numero dei giorni domandato, secondo il consueto. Si troverà

$$x = \frac{18 \times 4}{32} = \frac{72}{32} = 2^g \frac{1}{4}$$

113. I seguenti problemi potranno essere risoluti dagli studiosi per esercizio dell' esposta teoria.

Problema 1.° Un uomo camminando per 3 ore, ha fatto 5 leghe; se esso avesse camminato ugualmente per 7 ore, quante leghe avrebbe fatte? — Ris. Leghe 11 $\frac{2}{3}$

Problema 2.° Un fornaio ha fatto libbre 638 di pane, con 14 staia di grano; quante staia di grano della medesima quantità gli saranno necessarie, per fare 465 libbre di pane? — Ris. staia 10 e $\frac{65}{319}$ di staio.

Problema 3.° Due muratori lavorando 12 ore per giorno, hanno fatto un lavoro in 60 giorni; quanti giorni sarebbero stati loro necessarii, se avessero lavorato 8 ore per giorno? — Ris. Giorni 40.

Problema 4.° Cinquanta uomini vivono 100 giorni con una data quantità di farina; quanti giorni potranno sussistere 240 uomini con la medesima quantità di questa farina? — Ris. Giorni 20 e $\frac{5}{6}$ di giorno.

Problema 5.° Un viaggiatore camminando 10 ore per giorno, ha impiegato 25 giorni a fare 175 leghe, quante ne farebbe in 15 giorni camminando 6 ore per giorno? — Ris. Leghe 63.

Problema 6.° Nove operai lavorando 8 ore per giorno hanno messo 24 giorni a scavare un fosso; quanti giorni sarebbero stati necessari a 17 operai lavorando 10 ore per giorno per scavare il medesimo fosso? — Ris. Giorni 10 e $\frac{14}{85}$ di giorno.

CAPITOLO TERZO

Della Regola di Società

114. La regola di società non è che una regola del tre semplice ripetuta tante volte, quanti sono gli associati che vi sono compresi.

Esempio 1.° Tre negozianti mettono in comune il primo Lire 7000, il secondo 5000 e il terzo 3000; essi guadagnano Lire 4500; quanto tocca a ciascuno di questo benefizio?

Si comincerà dal sommare insieme tutti i capitali; cioè

Capitale del primo.	Lire 7000
Capitale del secondo . . .	« 5000
Capitale del terzo	« 3000
Capitale totale	Lire 15000

Ciò fatto si ragionerà come segue: se 15000 Lire di capitale hanno prodotto Lire 4500, cosa toccherà al primo che ha messo Lire 7000; lo stesso ragionamento si farà per i capitali 5000 e 3000 e si avranno le tre seguenti proporzioni

$$15000 : 4500 :: 7000 : x,$$
$$15000 : 4500 :: 5000 : x',$$
$$15000 : 4500 :: 3000 : x'';$$

le quali risolute mi daranno

x = al benefizio del 1.° capitale = 2100
x' = al benefizio del 2.° capitale = 1500
x'' = al benefizio del 3.° capitale = 900

Benefizio totale = 4500 Lire

115. Questa specie di quesiti possono ancora risolversi come segue; cioè: sommati i capitali si comincia dal vedere qual benefizio deve toccare per 1 lira, e quindi si moltiplica ciascun capitale per questo benefizio, e si ottiene con ciò la parte di ciascuno.

Così nel nostro esempio si dirà; se con 15000 lire si è guadagnato Lire 4500, con 1 lira si guadagnerà 15000 volte meno; vale a dire che si avrà da dividere 4500 per 15000, il che darà 0, 3 decimi per ogni lira; dunque avremo

$$0,3 \times 7000 = 2100$$
$$0,3 \times 5000 = 1500$$
$$0,3 \times 3000 = 900$$

Totale Lire 4500 come sopra.

116. Esempio 2.° Tre negozianti hanno guadagnato, uno lire 2100, il secondo lire 1500 e il terzo lire 900; si domanda qual'era il capitale di ciascuno, sapendo che il capitale totale era di Lire 15000.

In questo caso si sommeranno i benefizi, e nel resto si opererà come sopra e come si vede qui sotto

$$\begin{array}{r} 2100 \\ 1500 \\ 900 \\ \hline 4500 \end{array}$$

$$4500 : 15000 :: 2100 : x = 7000$$
$$4500 : 15000 :: 1500 . x' = 5000$$
$$4500 : 15000 :: 900 : x'' = 3000$$

117. Esempio 3.° Tre negozianti mettono in società la medesima somma, il primo per 15 anni, il secondo per 9 anni e il terzo per 5 anni; essi perdono Lire 4500; qual è la perdita che ciascuno deve soffrire.

In questo problema il capitale di ciascun negoziante essendo lo stesso, si sommerà il tempo,

$$\text{anni } 15+9+5=29,$$

e quindi si stabiliranno al solito le tre proporzioni, e si avranno i resultati che seguono

$$29 : 15 :: 4500 : x = 2327,59$$
$$29 : 9 :: 4500 : x' = 1396,55$$
$$29 : 5 :: 4500 : x'' = 775,86$$

Perdita totale Lire 4500,00

vale a dire che il 1.° perderà Lire 2327 e soldi 12 circa, il secondo Lire 1396 e soldi 11 e il terzo Lire 775 e soldi 17 circa.

Il seguente esempio potrà servire di riprova.

118. ESEMPIO 4.° Tre negozianti che avevano messo in società il medesimo capitale, hanno perduto l' uno lire 2227,59, il secondo lire 1396,55 e il terzo lire 775,86. Quanti anni ciascuno ha lasciato i suoi fondi in società, sapendo che la somma del tempo è di anni 29?

Il presente problema essendo simile ai precedenti, ci si limita a riprodurne solamente il calcolo come si vede qui sotto.

$$\begin{array}{l} 2327,59 \\ 1396,55 \\ \;\;775,86 \\ \hline 4500 \;:\; 29 :: 2327,59 : x \;\;= 15 \\ 4500 \;:\; 29 :: 1396,55 : x' \;= \;\;9 \\ 4500 \;:\; 29 :: \;\;775,86 : x'' = \;\;5 \\ \hline \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\;\; 29 \end{array}$$

Daremo fine a questa regola con l' esporre un problema di regola di società composta, la quale si riporta sempre ad una regola di società semplice, moltiplicando i capitali di ciascuno associato per il tempo pel quale esso ha effettuato un tale pagamento.

119. ESEMPIO 5.° Tre negozianti mettono in comune il primo lire 7000 per 6 anni, il secondo lire 5000 per 4 anni e il terzo lire 3000 per 5 anni; essi guadagnano lire 4500. Qual è il benefizio di ciascuno?

il 1.° mette	7000 l.	per	6	anni	$=7000\times6=$	42000	per anni	1
il 2.°	«	5000	« 4	«	$=5000\times4=$	20000	« «	1
il 3.°	«	3000	« 5	«	$=3000\times5=$	15000	« «	1
					Somma Lire	77000		

Ed il problema ora è ridotto a supporre che il primo mettesse Lire 42000 per 1 anno, il secondo Lire 20000 e il terzo Lire 15000. Il guadagno dovrà toccare in proporzione. Dunque

$$77000 : 4500 :: 42000 : x = 2454,55$$
$$77000 : 4500 :: 20000 : x' = 1168,83$$
$$77000 : 4500 :: 15000 : x'' = 876,62$$

Totale Lire 4500,00

120. I seguenti problemi potranno servire per esercizio.

Problema 1.° Tre giuocatori si sono associati ed hanno messo al giuoco, il primo lire 200, il secondo lire 600 e il terzo lire 1200; essi hanno guadagnato lire 800; quanto tocca a ciascuno? — Ris. Tocca al 1.° lire 80, al secondo lire 240 e al terzo lire 480.

Problema 2.° Tre giuocatori hanno fatto borsa comune; il primo ha dato lire 234, il secondo lire 702 e il terzo lire 1404; essi hanno provato una perdita totale di lire 780; qual' è la perdita di ciascuno? —
Ris. La perdita del 1.° è lire 78, il secondo lire 234 e il terzo lire 468.

Problema 3.° Tre persone hanno messo in società, il primo lire 3000 per 6 mesi, il secondo lire 4000 per 5 mesi e il terzo lire 8000 per 9 mesi; essi hanno fatto un benefizio di lire 12050; quanto tocca a ciascuno? — Ris. Al 1.° lire 1971,82, al 2.° lire 2190,91 al 3.° lire 7887,27.

Problema 4.° Una somma di Lire 256 deve distribuirsi tra 4 operai proporzionalmente al numero delle giornate e dell' ore di lavoro di ciascuno di essi; il primo ha lavorato 5 ore per 5 giorni, il secondo 7 ore per 8 giorni, il terzo 5 ore per 9 giorni e il quarto 10 ore per 13 giorni; qual' è la parte di ciascuno? — Ris. Al 1.° tocca Lire 25, al 2.° Lire 56, al 3.° Lire 45 e al 4.° Lire 130.

CAPITOLO QUARTO

Della Regola d' Interesse semplice

121. Le questioni relative alla regola d' interesse si risolvono col mezzo della regola del tre.

Si dà il nome d' interesse alla ricompensa che si ritira da un capitale che si presta. L' interesse si valuta a tanto per cento per anno. Questo tanto per cento è ciò che si chiama la *tassa dell'Interesse.*

L' interesse è *semplice* quando si aggiunge al capitale puramente e semplicemente senza prendere l' interesse dell' interesse. Così, alla tassa del 6, un capitale di lire 100 produce 6 lire in capo ad un anno, 12 lire in capo a 2 anni, 18 lire in capo a 3 anni, 24 in capo a 4 anni, ec.

L' interesse è *composto* quando si riunisce ciascun anno al capitale e che se ne prende l' interesse; di questo però non ne parleremo nel presente trattato, non essendo adattato per la classe a cui questo è destinato.

I seguenti esempii sono atti a rendere assai chiara questa teoria.

122. Problema 1.° Un capitale di Lire 6000 posto per un anno al 5 per 100 (per $\%$); qual *interesse* deve produrre?

Si ha evidentemente la proporzione

$$100 : 5 :: 6000 : x,$$

dalla quale si deduce

$$x = \frac{6000 \times 5}{100} = 300 \text{ lire.}$$

In un anno dunque lire 6000 poste al 5 per $\%$ rendono lire 300.

La regola generale di questi problemi consiste perciò *nel moltiplicare il capitale per la tassa dell' interesse, e quindi nel dividere il resultato per cento.*

Problema 2.° Un capitale posto al 5 per o/o ha prodotto lire 300 d' interesse in un anno; qual è questo *capitale?*

In questo caso avremo

$$5 : 100 :: 300 : x,$$

e quindi

$$x = \frac{300 \times 100}{5} = 6000,$$

cioè, il capitale era di lire 6000.

In questi casi la regola generale è; *moltiplicare l' interesse ottenuto per 100; e quindi dividere questo prodotto per la tassa dell' interesse.*

Problema 3.° Un capitale di lire 6000, situato per 1 anno, ha prodotto lire 300 d' interessi; a qual *tassa* era messo?

Cercare la tassa equivale a cercare quella di 100 lire, dunque avremo

$$6000 : 300 :: 100 : x$$

e

$$x = \frac{300 \times 100}{6000} = 5;$$

cioè, la tassa dell' interesse era del 5.

Finalmente in questi problemi la regola generale consiste; *nel moltiplicare gl' interessi ottenuti per* 100; *e quindi dividere pel capitale.*

M' accingo a risolvere dei quesiti simili ai precedenti per un tempo maggiore di un anno.

123. **Problema** 4.° Un capitale di lire 6600 è situato per anni 8 e mesi 5 al 5 per o/o; qual' *interesse* deve produrre?

Per risolvere questa questione basterà osservare che lire 6600 daranno per anni 8 mesi 5, il medesimo interesse che 8 e $\frac{5}{12}$ moltiplicato per 6600, ciò che ossia lire 55550, darebbero in un solo anno. Non rimane allora che da risolvere questa questione: quanto renderanno lire 55550 prestate al 5 per % per un anno? essa dà la proporzione

$$100 : 55550 :: 5 : x,$$

donde si deduce

$$x = \frac{55550 \times 5}{100} = \text{Lire } 2777,50;$$

vale a dire che renderebbero lire 2777 e soldi 10.

N. B. Senza eseguir la moltiplicazione, nella pratica, sarà in alcuni casi utile lo scrivere subito la proporzione come segue

$$100 : 6600 \times 8\frac{5}{12} :: 5 : x$$

e ciò per eseguire le riduzioni che possono aver luogo, e per quindi operare come sopra.

Problema 5.° Un capitale posto per 8 anni e mesi 5 al 5 per % ha prodotto lire 2777 e soldi 10; qual'è questo *capitale?*

Dal problema 2.° abbiamo veduto che quando il tempo era di un anno, bastava moltiplicare l'interesse per 100 e quindi dividere il prodotto per la tassa dell'interesse; ora nel caso attuale siccome gli interessi sono Lire 2777 e soldi 10 perchè essi sono ripetuti per 8 anni e $\frac{5}{12}$ di anno; così è evidente che per ritrovare il vero capitale sarà necessario dividere non solo per la tassa dell'interesse, ma anche per il tempo che il capitale è rimasto a frutto; laonde per la soluzione del nostro problema

avremo

$$x=\frac{2777,5\times100}{5\times8\frac{5}{12}},$$

formula che può ridursi alla seguente

$$x=\frac{55550}{8\frac{5}{12}}=\frac{55550\times12}{101}$$

ed eseguendo la moltiplicazione, e quindi la divisione si trova che questo capitale è di lire 6600.

Problema 6.° Un capitale di lire 6600 messo ad interesse per 8 anni e 5 mesi produce lire 2777 e soldi 10; a qual *tassa d' Interesse* è stato posto?

Osservando la formula del problema 3.° quando il tempo era di un anno, e ragionando come nel problema antecedente, troveremo che la soluzione del nostro problema resulta da

$$x=\frac{2777,5\times100}{6600\times8\frac{5}{12}},$$

formula che risoluta dà per la tassa dell' interesse 5.

Problema 7.° Un capitale di lire 6600 posto al 5 per o/o produce lire 2777 e soldi 10; si domanda per quanti *anni* è rimasto ad interesse?

Per risolvere questo problema cominceremo da stabilire quanti interessi hanno prodotto in tutto il tempo lire 100; cioè:

$$6600:2777,5::100:x=\frac{100\times2777,5}{6600}.$$

Ora siccome è evidente che x rappresenta gli interessi di lire 100 per tutto il tempo, se lo divideremo per la tassa dell' interesse troveremo il tempo, donde chia-

mando t il tempo, avremo

$$t = \frac{2777,5 \times 100}{6600 \times 5}$$

dalla quale si deduce con facilità il tempo t uguale ad anni 8 e mesi 5.

CAPITOLO QUINTO

Degli Sconti

124. Lo *sconto* è la rimessa che fa il creditore, o la perdita alla quale egli si sottopone in favore del debitore, quando vuole essere pagato avanti la scadenza.

Ora, scontare, equivale a dedurre da una somma prestata gli interessi che vi sono confusi; il che fa che anche queste sorti di questioni si risolvano per mezzo della regola del tre.

Esempio. 1.° Un uomo, che ha tratto una lettera di cambio di lire 2500 sopra un banchiere, pagabile tra un anno, ha bisogno di denaro; offre al banchiere di dedurre l'interesse, alla ragione del 6 per o/o per anno, questo si accorda e il prezzo gli viene scontato sul momento; quanto deve pagare il banchiere?

Siccome il banchiere deve ritenere l'interesse del capitale al 6 per o/o, ne segue che per 100 lire esso non deve pagare che 94 lire. Possiamo per ciò dire: se per un capitale di 100 lire non si devono pagare che 94 lire, quanto si dovrà pagare per un capitale di lire 2500?

Possiamo dunque stabilire questa proporzione diretta

$$100 : 2500 :: 94 : x$$

dalla quale si deduce $x = 2350$. Da ciò si vede che il banchiere deve prelevare lire 150, che sono precisamente l'interesse di lire 2500 per un anno, la tassa essendo al 6 per o/o.

Questo modo di operare si chiama prendere l'*interesse*

o lo *sconto al di fuori*. Ciò non è il modo più giusto di prendere lo sconto, quantunque esso sia il più usato; poichè, in questo caso si vede che i banchieri, ritenendo lo sconto dell' ammontare della cambiale, prendono l' interesse e del capitale e degl' interessi che vi si trovano confusi.

125. Se al contrario non si ritiene che l' interesse della somma che si paga effettivamente, l'operazione si chiama prendere lo *sconto in dentro*.

Esempio 2.° A cosa si ridurranno attualmente lire 2500 pagabili in un anno, l'interesse essendo del 6 per % ?

Per eseguir ciò, si dirà: se 106 lire pagabili in un anno, si riducono a 100 lire pagabili attualmente, a quanto si ridurranno lire 2500?

Si avrà la proporzione $106 : 2500 :: 100 : x$, dalla quale si deduce $x = 2358,49$.

Il banchiere pagherà perciò lire 2358, 49, e riterrà per conseguenza lire 141, 51.

Quest' ultima quantità dev' essere l' interesse di lire 2358, 49 al 6 per % per un anno.

Infatti se si cerca quest' interesse si avrà

$$100 : 2358,49 :: 6 : x,$$

donde $x = 141,509$. Quest' ultima maniera di calcolare l' interesse o lo sconto è dunque la più giusta, poichè si accorda con la teoria delle regole dell' interesse.

Esempio 3.° Un possidente pone presso un banchiere una data somma con la quale, compresici gl' interessi al $4\frac{1}{2}$ per % per anno, possa ritirare alla fine dell'anno franchi 1755, 6; ma 4 mesi dopo, avendo bisogno del denaro, prega il banchiere di pagarlo, offrendogli di scontare *in dentro* l' interesse per i rimanenti 8 mesi; qual somma deve pagare il banchiere?

Per risolvere questo problema, si ragionerà come segue: l' interesse per un anno essendo del $4\frac{1}{2} = \frac{9}{2}$

per 8 mesi ne sarà gli $\frac{8}{12}$ ossia $\frac{2}{3}$; dunque una somma di 100 franchi prestata per 8 mesi deve produrre $\frac{9}{2} \times \frac{2}{3}$ ossia 3 franchi d'interesse, vale a dire, che quello il quale l'ha ricevuta in imprestito, deve rendere 103 franchi, la somma di franchi 1755,6 anticipata dal banchiere non essendo che un simile rimborso, avremo la proporzione

$$103 : 100 :: 1755,6 : x$$

dalla quale ricaveremo $x = 1704,47$, cioè la somma che deve anticipare il banchiere.

Si concepisce ugualmente come si deve operare in un caso simile anche per lo sconto *in fuori*.

CAPITOLO SESTO

Regola del Tanto per Cento

126. Nelle transazioni commerciali in generale, e nella maggior parte degli affari della vita privata, l'uso è di valutare tutti i benefizj e tutte le perdite, eccettuatene poche, ad un tanto per cento. Passiamo a far conoscere questa regola sopra alcuni esempii.

Problema 1.° Un negoziante compra per 6352 lire e 9 soldi di mercanzia, rivendendola guadagna il 6 per o/o; qual'è il suo benefizio?

Si ha, riducendo i 9 soldi a decimali, la proporzione

$$100 : 6 :: 6352,45 : x;$$

dalla quale si ricava

$$x = \text{lire } 381.\ 3.\ —$$

Problema 2.° Sono state comprate libbre 6500 fieno a lire 2. 16. 8 il o/o; si domanda quanto è importato.

È evidente che dovremo avere la proporzione

$$100 : 6500 :: 2.\ 16.\ 8 : x$$

e che il calcolo si riduce a moltiplicare le libbre 6500 per lire 2. 16. 8, quindi a dividere per 100, il che si eseguisce come si vede qui sotto

```
      Lire  2. 16. 8
   libbre 6500
          ------------
          13000
           3250
           2166. 13. 4
          ------------
          184|16. 13. 4
             |20
            3|33
             |12
            4|00
```

Eseguita la moltiplicazione delle lire 2. 16. 8 per 6500 si ottiene lire 18416. 13. 4; queste siccome si debbono dividere per cento, nella pratica, si separano per mezzo di una linea le ultime due cifre alla destra degli interi il che si fa come si vede sopra, e quindi si moltiplica ciò che rimane alla destra della linea, prima per 20 e poi il resto per 12 per avere i soldi e denari, e si ottiene finalmente pel valore delle libbre 6500 fieno a lire 2. 16. 8 lire 184. 3. 4.

Problema 3.° Sono state comprate libbre 7200 carbone a lire tre il cento con la tara del 6 per %; si domanda il prezzo netto delle libbre 7200?

È evidente che non si debbono pagare le 7200 libbre, ma bensì 7200 meno 6 libbre per ogni 100 libbre; mediante ciò cominceremo da moltiplicare 7200 per 6 come si vede qui sotto, e quindi separare 2 cifre alla destra per dividere per cento, onde avere la tara domandata.

7200
6

Tara libbre 432|00

Carbone lordo libbre 7200
Tara . . . . . » 432

A pagamento libbre 6768

che a Lire 3 per cento danno

6768×3

203|04
|20
—|80
9|60

cioè, lire 203. —. 9, ossia semplicemente lire 203.

127. Darò termine a questo trattato di Aritmetica con proporre alcuni problemi che potranno essere risoluti per esercizio dai giovani.

Problema 1.° In una città assediata vi sono quattro mulini; il primo può macinare ciascun giorno 3 sacca, il secondo 5, il terzo 7 e il quarto 9.

Sapendo che si vuol far macinare 648 sacca di grano, si domanda quanti giorni ci vorrà per macinarlo tutto, e quanti sacchi se ne dovranno distribuire a ciascun mulino, in proporzione di ciò che esso può macinare. — Ris. In giorni ventisette il grano sarà tutto macinato; il 1.° mulino ne macinerà sacca 81, il 2.° 135, il 3.° 189 e il 4.° 243.

Problema 2.° Un mercante vende 12 libbre di caffè avariato, al prezzo di soldi 16 la libbra, e perde lire 6 e soldi 8 sul totale; quanto la libbra aveva pagato questo caffè? — Ris. Lire 1. 6. 8.

Problema 3.° Si compra del vino in bottiglie alla ragione di lire 1 e soldi 8 per bottiglia. Si rivendono le

bottiglie vuote al prezzo di 3 soldi, in modo che la spesa non ascende che a lire 60. Si domanda quante bottiglie di vino si sono comprate? — Ris. Bottiglie 48.

Problema 4.° Una libbra di zucchero costa lire 1 e soldi 3, e una libbra di caffè lire 1 e soldi 17; si vogliono spendere lire 100 per comprare un' uguale quantità di zucchero e di caffè. Quante libbre si avranno tanto di zucchero, quanto di caffè? — Ris. Libbre 33 e once 4.

Problema 5.° Un mercante compra 12 dozzine di vasi di porcellana al prezzo di 15 lire la dozzina. Nel trasportargli, rompe 5 vasi. A qual prezzo deve rivendere i rimanenti per fare un benefizio totale di lire 60? — Ris. A Lire 20 e 72 centesimi di lira per ogni dozzina.

Problema 6.° Un libraio volendo calcolare le spese della stampa di un libro di 35 fogli, fa il seguente conto: 30 lire di composizione e tiratura e 5 lire di correzione per foglio, una risma di carta di 500 fogli a lire 12, la legatura a 10 soldi il volume, la copertura a un soldo, e lire 85 di altre spese. Con questi dati si vuol sapere quanto costerà l' edizione tirata a 1000 esemplari e il prezzo di ciascun volume sapendo che il libraio venderà l' opera il doppio di quello che gli costerà? — Ris. l' edizione costerà lire 2700, ciascun volume sarà venduto lire 5 e soldi 8.

FINE

INDICE

PARTE PRIMA

PARTE SECONDA

PARTE TERZA

FINE



